Analyse statistique de comportements d'élèves en algèbre

Gilles Bisson, Alain Bronner, Mirta Gordon, Jean-François Nicaud, David Renaudie

Analyse statistique de comportements d’élèves en algèbre

Gilles Bisson*, Alain Bronner, Mirta B. Gordon*, Jean-François Nicaud***, David Renaudie***

** LEIBNIZ-IMAG*
46 av Félix Viallet
38031 Grenoble Cedex
{Gilles.Bisson, Mirta.Gordon, David.Renaudie}@imag.fr
*** ERES, LIRDEF, et IUFM Montpellier*
BP 4152
34092 Montpellier Cedex 5
Alain.Bronner@montpellier.iufm.fr
**** LEIBNIZ-IMAG et MTAH*
46 av Félix Viallet
38031 Grenoble Cedex
Jean-Francois.Nicaud@imag.fr

RÉSUMÉ. Nous présentons une analyse de comportements d’élèves qui ont résolu des exercices d’algèbre avec le logiciel Aplusix. Nous avons réalisé un logiciel produisant des statistiques, à partir des protocoles (fichiers enregistrant les interactions élève-logiciel), au niveau de la justesse des étapes de calcul et des résolutions. Nous avons particulièrement étudié les activités de classes de seconde et de première S. Cette étude fait ressortir les variables didactiques qui entrent en jeu dans les types d’exercices choisis (qui sont des types très classiques). Elle montre que le niveau de technicité algébrique des élèves est assez faible par rapport à ce que l’on peut attendre à ce moment de leur apprentissage. Nous avons aussi analysé ces données statistiques avec des techniques de classification automatique (clustering), dans le but de déceler des catégories d'élèves.

MOTS-CLÉS : calcul algébrique, étude statistique, variables didactiques, classification.

1 Introduction

Les chercheurs de la communauté « AI and Education » se sont très tôt intéressés à l'analyse des comportements d'élèves en arithmétique et en algèbre, ainsi qu'à la modélisation des élèves dans ce domaine. Les données ont été recueillies au début sur papier et par la suite sur ordinateur. De nombreuses analyses ont été conduites en différé, ce qui permet de rechercher des techniques en observant les données réelles et de disposer d'un temps important pour calculer les modèles [Burton 1982, Sleemann 1983]. Certaines modélisations d'élèves ont été implantées dans des logiciels interactifs, nécessitant l'écriture d'algorithmes rapides pour que le temps de réponse soit acceptable pour l'élève [Burton 1982]. Plusieurs cadres de modélisation ont été utilisés, en particulier des réseaux de procédures [Burton 1982], des ensembles de règles de réécriture [Sleemann 1983, Payne & Squibb 1990], des ensembles de compétences [Jean 2002]. Souvent les chercheurs sont partis d'un ensemble de connaissances correctes ou erronées pré-construites en observant manuellement les protocoles [Nguyen-Xuan et al. 1993]. Quelquefois, des connaissances ont été construites automatiquement [Sleemann 1982].

Au début de l'année 2002, nous avons décidé de conduire de nouveaux travaux dans ce champ de recherche, dans le cadre d'un projet[1] s'appuyant sur l'utilisation de la dernière version du logiciel Aplusix. Trois raisons qui nous y ont poussés. La première raison provient du fait que nous pouvons disposer facilement de données massives et détaillées. En effet, le logiciel Aplusix [Bouhineau et al. 2001, Nicaud et al. 2002] permet à l'élève de faire les pas de calcul de son choix, grâce à un éditeur avancé d'expressions algébriques. Il enregistre le détail des interactions (les frappes de touches, les clics de souris, les commandes) dans des fichiers (appelés protocoles par la suite), ce qui permet de rejouer des sessions d'élèves (avec un « magnétoscope ») et d'analyser ces données avec des logiciels. Ces données apportent, en particulier, une meilleure localisation des actions. Les progrès réalisés cette dernière décade par les logiciels d'analyse de données, ainsi que par les techniques d'apprentissage automatique, constituent la deuxième raison. La constatation qu'il reste un travail important à réaliser est la troisième raison. Des modèles d'élèves ont été construits, mais beaucoup ne sont pas passés des mémoires des ordinateurs à des publications [Koedinger et al. 1997]. Des modèles ont été publiés [Sleemann 1983, Payne & Squibb 1990], mais ils ne concernent que l'algèbre des débutants.

En septembre et octobre 2002, nous avons conduit une expérimentation auprès de 91 élèves de 3e, 108 élèves de 2e et 47 élèves de 1re, expérimentation consistant à leur faire résoudre des exercices d'arithmétique et d'algèbre en utilisant le logiciel Aplusix. Ces exercices étaient des exercices classiques. Nous analysons

---

1 Projet financé par le ministère de la recherche.

actuellement les protocoles ainsi obtenus de différentes façons : (1) par l'analyse statistique de certains traits, (2) l'application de techniques de classification automatique, (3) l'analyse clinique à la main, (4) et aussi par l'analyse automatique des règles et des stratégies utilisés par les élèves. L'objectif général est de déterminer des conceptions d'élèves particuliers en algèbre, ainsi que des conceptions prototypiques. Les travaux présentés dans cet article concernent les deux premiers points : l'analyse statistique et la classification automatique (ou « clustering »).

L'article décrit l'expérimentation en section 2. En section 3, une analyse des statistiques obtenues avec deux classes de première est présentée. La section 4 est consacrée à l'application des techniques de clustering à des classes de seconde.

2 L'expérimentation EXP92

L'expérimentation que nous avons appelée EXP92 a été préparée pendant l'été 2002 pour être conduite en septembre et octobre. La situation générale que nous avons choisie est la résolution d'exercices des différents types classiques (calculs numériques, développements, factorisations, résolution d'équations, d'inéquations, de systèmes d'équations) qui mobilisent des connaissances enseignées l'année scolaire précédente, cela sans rappel préalable de ces connaissances. Les élèves ont travaillé en salle informatique, de façon individuelle, en étant encadrés par leur professeur de mathématique. Les exercices étaient les mêmes pour tous les élèves, fournis automatiquement par le logiciel. Trois situations précises ont été préparées, chacune pour une séance d'une heure environ. Ces situations différents par le mode de vérification des calculs que le logiciel effectue et par les exercices proposés.

2.1 Le logiciel Aplusix utilisé

Le logiciel Aplusix [Bouhineau et al. 2001] comporte un éditeur avancé d'expressions algébriques et de raisonnements qui permettent à l'élève de faire les calculs algébriques qu'il souhaite avec les étapes de son choix. Aplusix fonctionne avec des expressions bien-formées à trois exceptions près pendant la saisie : (1) des arguments manquants qui sont automatiquement représentés par des points d'interrogation (ex : « x+? »), (2) des parenthèses qui peuvent ne pas être équilibrées, (3) des types qui peuvent ne pas être respectés (ex : « 2x=1 ou x » comporte un type non booléen à droite du « ou »). Ces exceptions sont nécessaires à la saisie. En revanche, Aplusix ne permet pas de passer à l'étape suivante lorsque l'expression de l'étape courante n'est pas bien-formée. A côté des fonctionnalités d'insertion et de suppression, le logiciel inclut des opérations de sélection, couper, copier, coller, glisser-déposer qui fonctionnent de façon algébrique.

Dans la version de l'expérimentation, les indicateurs apportant des informations sur l'état des étapes étaient cachés. La vérification des calculs par le logiciel était désactivée dans la première situation, elle se faisait à la demande dans la deuxième situation (cf. figure 1 avec le menu « vérifier ») et était permanente dans la troisième (le logiciel activant la vérification chaque fois que l'expression en cours de modification est bien-formée). Cet appauvrissement du contexte de travail a été choisi pour que l'activité soit plus effectuée par l'élève et moins par le logiciel.

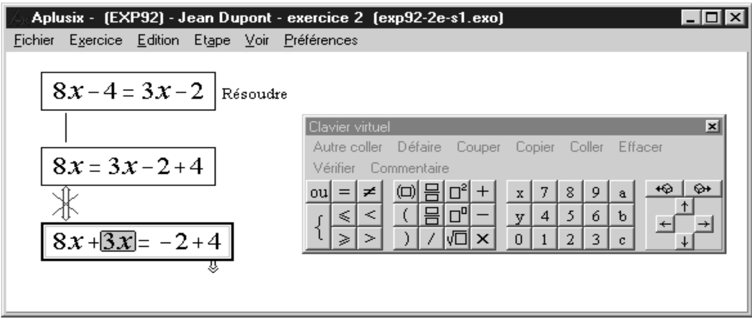


Figure 1. *Copie d'écran. L'élève peut utiliser le clavier réel ou le clavier virtuel. Ici, il vient d'effectuer un glisser-déposer de 3x de la droite vers la gauche du signe égal et de demander la vérification en cliquant sur le menu « vérifier » de la fenêtre « Clavier virtuel ». Aplusix lui indique par une équivalence barrée en rouge que l'étape courante n'est pas équivalente à l'étape précédente.*

2.2 Les exercices

Un fichier d'exercices a été élaboré pour chacune des trois situations de chacune des trois classes de 3e, 2e et 1re. La progression choisie a consisté à changer de type d'exercice à chaque fois pour minimiser l'apprentissage (l'objectif de l'expérimentation étant de modéliser un état de connaissances, pas de faire en sorte que l'élève apprenne). Le fichier pour la première situation de la classe de 2e comporte 30 exercices : 3 « calculer » portant sur des expressions numériques ; 8 « développer et réduire » portant sur des polynômes de degré 2 ; 6 « factoriser » portant sur des polynômes de degré 2 ; 10 « résoudre » portant sur des équations polynomiales (4 de degré 1, 6 de degré 2) et enfin, 3 « résoudre » portant l'un sur une équation fractionnaire (4/x=15), l'autre sur une inéquation de degré 1 et le dernier sur un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Les nombres sont majoritairement des nombres entiers. Des fractions numériques interviennent toutefois dans cinq exercices et des radicaux dans un exercice.

2.3 Les consignes et les séances

Lors de la première séance, les enseignants étaient chargés de faire une petite introduction au logiciel. Pour cela, ils pouvaient utiliser de courtes séquences vidéos décrivant son fonctionnement. Pendant les séances proprement dites, les consignes étaient d'aider les élèves sur les problèmes liés à l'utilisation du logiciel et de ne pas leur fournir d'assistance au niveau mathématique. Les introductions ont été brèves car les élèves n'ont pas éprouvé de difficulté à utiliser le logiciel. Certains enseignants se sont limités aux deux premières situations (sans vérification, puis avec vérification à la demande). D'autres ont réalisé les trois situations.

3 Analyse des statistiques de deux classes de première S

Nous nous intéressons tout d'abord aux résultats d'ensemble des deux classes de première S, puis aux résultats par séance et enfin par type d'exercices. Pour chaque type d'exercices, nous recherchons ceux qui semblent difficiles et avançons une analyse en termes de variables didactiques [Brousseau 1981]. Dans ce qui suit, les situations sont désignées par S1, S2 et S3. Dans S1, Aplusix n'indique pas si les calculs sont justes ; dans S2, il l'indique quand l'élève le demande ; dans S3, il l'indique en permanence.

3.1 Résultat global et par séance

Le tableau 1 présente les résultats globaux, en termes d'étapes équivalentes, d'exercices quasi-résolus et d'exercices résolus.

	Lycée Fabre (15 élèves)					Lycée Monnet (31 élèves)			
	Global	S1	S2	S3		Global	S1	S2	S3
Taux équivalence	83	73	78	96		85	76	82	94
Quasi résolu	76	66	67	91		72	59	70	85
Résolu	68	61	59	80		67	57	66	76

Tableau 1. *Résultats globaux en première S. Les nombres sont des pourcentages. Le taux d'équivalence est le pourcentage d'étapes justes. Un exercice est quasi-résolu lorsque la forme est résolue mais non réduite (ex : x=6/4 pour une équation).*

Ces résultats, de même ordre entre les deux classes, sont assez élevés du point de vue de l'équivalence entre les étapes, mais relativement plus faibles dans la situation S1 pour le nombre d'exercices résolus. Si l'on note une relative stabilité entre les situations S1 et S2, la progression est plus nette dans la situation S3, sans pour autant atteindre 100%. En situation S2, les élèves n'utilisent pas la fonctionnalité de vérification des calculs à chaque étape et laissent parfois passer des erreurs dans des étapes qui leur semblent évidentes. La familiarisation avec l'EIAH et le contrôle permanent de l'équivalence sont des facteurs déterminants de cette progression dans la mesure où il n'y avait aucune intervention de l'enseignant.

3.2 Analyse selon le type d'exercices

L'analyse des résultats selon le type d'exercices (tableau 2) montre que les élèves produisent de meilleurs résultats sur les types d'exercices « calculer » et

« factoriser » que sur le type « Développer » dans les situations S1 et S2. Ce n'est qu'à la troisième situation que l'on observe une meilleure réussite pour ce dernier type, mais il faut dire qu'il n'y avait alors qu'un exercice de ce type, contrairement aux deux premières situations qui en comportaient plusieurs.

		Résultats (taux résolu) selon le type d'exos							
	Lycée Fabre (15 élèves)					Lycée Monnet (31 élèves)			
	Global	S1	S2	S3		Global	S1	S2	S3
Calculer	86	83	75	94		82	70	84	97
Factoriser	83	86	73	89		81	78	82	83
Développer	66	56	42	100		73	73	53	96
Resoudre une équation	60	37	57	75		60	38	61	71
Resoudre une inéquation	45	66	28	42		48	48	44	51
Resoudre un système	2 /9	0/7	1/1	1/1		11/40	4/25	0/5	7/10

Tableau 2. ***Résultats en fonction du type d'exercice. Les nombres sont des pourcentages sauf pour les types peu fréquents où ce sont des rapports.***

En revanche, le taux de réussite des types Résoudre équation, inéquation et système de deux équations à deux inconnues est faible pour des classes de première S. Une évolution est perceptible dans les résultats à la situation S3, sans atteindre les réussites des types précédents. Cela est dû en partie à la présence de quelques équations de types non standard comme on le verra plus loin.

3.3 Analyse des exercices à taux de réussite faible

Nous avons rassemblé dans le tableau 3 les exercices à taux de réussite faible sur les types « Calculer », « Factoriser » et « Développer ».

	Lycée Fabre (15 élèves)				**Lycée Monnet (31 élèves)**		
	S1	**S2**	**S3**		**S1**	**S2**	**S3**
Calculer	**83**	**75**	**94**		**70**	**84**	**97**
$3\sqrt{18}+5\sqrt{50}-\sqrt{98}$	75				61		
Factoriser	**86**	**73**	**89**		**78**	**82**	**83**
(4x+3)(2x+5) - 4x+3)(7x-9)	75				70		
(4x-8) + (4x-8)(6x-9)		57				80	
$(5x+1)^2-(4x+3)^2$		66				79	
$9x2y^2 + 42xy + 49$			0/8				0/1
Développer	**56**	**42**	**100**		**73**	**53**	**96**
$(4x+5)^2$	66				77		
$2(x-3)^2 -3(2-x)(2+x) + 3x^2-8$	1/1				40		
$(7x-2)^2-(3x+12)(3x-12)$		42				53	

Tableau 3. *Exercices à taux de réussite faible parmi les exercices des types Calculer, Factoriser et Développer. Le taux global de réussite de chaque type d'exercice est indiqué en caractères gras.*

Les éléments suivants se présentent comme des variables didactiques potentielles qui influencent la nature des stratégies et des procédures :

• La nature des nombres à calculer et des coefficients ;
• Dans « Factoriser » : la présence ou non d'un facteur 1 implicite ;
• Dans « Développer » et « Factoriser » : le nombre de termes ; le nombre de lettres ; la complexité des termes ; la diversité des règles à utiliser ; la présence ou non d'un facteur –1.

Le tableau 4 rassemble les exercices de type « résoudre équation » à faible taux de réussite. On peut apprécier la difficulté relative de chaque exercice en comparant avec le taux global dans le type, que nous avons rappelé en caractère gras.

	Lycée Fabre (15 élèves)				Lycée Monnet (31 élèves)		
	S1	**S2**	**S3**		**S1**	**S2**	**S3**
Résoudre équation	**83**	**75**	**94**		**70**	**84**	**97**
$\frac{4}{3}x+\frac{7}{5}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}$		21	33			46	57
(3x+5)(-x+9)=0	58				53		
(-3x+9)(2x+4)-(-3x+9)(7x-1)=0	41				33		
(5x+3)(2x+7)=(5x+3)(6x-9)		20	64			52	50
$4x^2=81$	8				25		
$(x-3)(x+7)=x^2-4x+3$		40	83			70	82
$\frac{(2x+4)(5-3x)}{4x(x+1)}=0$		50				53	
$\frac{(2x-2)}{(5x-3)}=1$		64				53	
$\frac{(3x-3)}{(5x-3)}=1$			93				69

Tableau 4. *Exercices à taux de réussite faible parmi les exercices du type « Résoudre équation ». Le taux global de réussite est indiqué en caractères gras.*

Dans ce type d'exercices les éléments suivants se présentent comme des variables didactiques potentielles :

• La nature des coefficients
• Le degré des équations polynômes
• La forme des équations du second degré : A = 0 ; A=B ; A-B=0 ; $ax^2=b$
• La forme des expressions A et B
• Pour les équations $ax^2=b$, la valeur des coefficients a et b
• Pour les équations rationnelles $\frac{A}{B}$ = a, le coefficient a
• La présence d'un facteur –1 devant certaines expressions et plus généralement les variables du développement.

Le taux de réussite sur ce type est en général faible, comme on l'a déjà dit, ce qui peut surprendre pour un niveau de classe de première S. En comparaison, les équations utilisant dans la résolution les « identités remarquables » de la classe de troisième sont assez bien réussies. Certaines valeurs des variables les rendent très difficiles. Ainsi, la présence d'un facteur -1 pose encore des difficultés à certains élèves. Des résultats surprenants même pour une équation comme $4x^2 = 81$; un nombre important d'élèves ne considérant pas la racine négative. Les élèves sont perturbés par des valeurs des variables (coefficients fractionnaires) ou par des types d'équations non routinières. La plupart d'entre eux présentent d'importantes difficultés à adapter les stratégies et les techniques élémentaires à la résolution de ces équations. Des apprentissages effectifs peuvent être repérés sur les types AC = BC ou $\frac{A}{B} = 1$ entre les situations S1 et S3.

Le tableau 5 concerne les exercices de type « résoudre inéquation » et « résoudre système » à faible taux de réussite.

	Lycée Fabre (15 élèves)				Lycée Monnet 39 élèves)		
	S1	**S2**	**S3**		**S1**	**S2**	**S3**
Résoudre inéquation	**66**	**28**	**42**		**48**	**44**	**51**
6x-(5-3x) ≤ -3(x+1)	75				51		
9(7x+2)-6x+4 ≤ 7-4x-3(-6x+9)		33	50			51	46
$\frac{2x}{5} - \frac{13}{30} + \frac{x}{15}\ \mathrm{p}\ \frac{2}{15} + \frac{x}{3}$	1/3				41		
$3\sqrt{7}x + 2\ \mathrm{f}\ \sqrt{5} - 8\sqrt{6}x$		0/1				22	50
Résoudre système	**0/7**	**1/1**	**1/1**		**4/25**	**0/5**	**7/10**
4x+3y=24 et 5x+7y=43	0/7				4/25		
6x-9y+2=0 et 8x+3y-1=0		1/1	1/1			0/5	7/10

Tableau 5. *Exercices « résoudre inéquation ou système » à taux de réussite faible.*

On retrouve les mêmes variables didactiques que pour le type précédent. La nature des coefficients dans les inéquations (rationnelles, irrationnelles avec radicaux simples) constitue une variable particulièrement sensible.

4 Analyse des classes de seconde par classification automatique

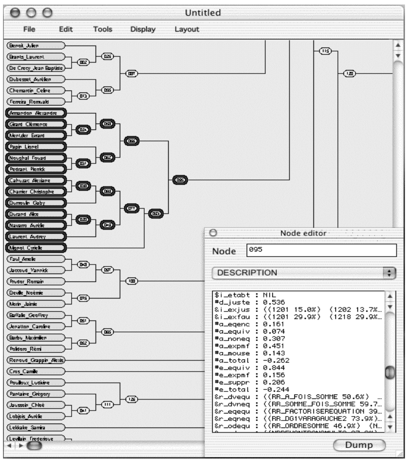
Les techniques de classification automatique [Jain et al. 1999] ont pour objectif de mettre en évidence des régularités dans un ensemble de données de grande taille, caractérisé par un nombre important de descripteurs (ou traits). Ces régularités permettent de structurer les données en groupes homogènes et contrastés, auxquels il est possible d'associer une caractérisation. Ces approches sont utilisées pour faciliter l'analyse et la visualisation de données ; dans cette étude, elles nous aident à mettre en évidence des comportements significatifs de groupes d'élèves.

Suivant l'algorithme de classification, on cherche soit une partition des données initiales, soit une organisation hiérarchique des groupes. Généralement, le critère utilisé pour constituer ces classes ou groupements est une « distance » (au sens mathématique) entre les données. Dans ce travail nous avons expérimenté les deux types d'approche, avec trois sortes d’algorithmes basés sur des critères assez différents. Nous avons appliqués au cours de cette analyse : les k-means [McQueen 1967], la classification hiérarchique ascendante (HAC) [Day et al. 1984] et le Super-Paramagnetic-Clustering (SPC) [Blatt et al. 1997]. Dans tous les cas, les données sont représentées par des vecteurs dont la dimension est égale au nombre de traits et elles sont comparées à l’aide d’une distance de type « Euclidienne ». Les principes sous-jacents de ces algorithmes sont les suivants :

- Le k-Means repose sur l'hypothèse que les données suivent de simples distributions gaussiennes isotropes dont le nombre, les centres et les variances sont inconnues.

- La HAC cherche à construire l'arbre dont la distance ultramétrique est la plus proche des distances originales entre les données. Nous avons utilisé ici le « lien moyenne » comme distance inter-groupes.

- L'algorithme SPC est basé sur un modèle de la physique statistique. Il cherche à constituer des groupements dont la forme dans l'espace des données peut être arbitraire, non nécessairement hyper-sphérique comme les k-Means



Hiérarchie produite par un HAC

Le Tableau 6 présente la liste des descripteurs statistiques que nous avons retenus pour décrire les protocoles et caractériser les groupes d’élèves.

Famille de traits	***Traits retenus par élève et par exercice***
Nombre « d'actions » effectuées durant un exercice (frappes au clavier ou utilisation de la souris) conduisant à un résultat :	- Equivalent à l'énoncé - Equivalent à l'expression de l'étape précédente - Non équivalent à l'expression de l'étape précédente - Une expression mal formée - Un déplacement du curseur avec la souris
Nombre d'étapes (c-à-d le nombre d'expressions dans l'éditeur: voir Figure 1)	- Equivalentes à l'étape précédente - Pour lesquelles l'expression est mal formée - Supprimées par l'élève
Temps (en secondes) passé sur des expressions :	- Equivalentes à l'étape précédente - Non équivalentes à l'étape précédente - Durant lequel l'expression est mal formée
Valeurs globales	- Nombre total d'actions dans le fichier de protocoles - Nombre total d’étapes dans le fichier de protocoles - Temps total passé sur l'exercice par l'élève

Tableau 6. *Descripteurs utilisés pour la classification automatique.*

L'ensemble des protocoles recueillis nous a fourni des données correspondant aux prestations des élèves sur un grand nombre d'exercices. Parmi les 30 proposés dans la situation S1 aux élèves de seconde, nous avons retenu, pour une première analyse, l'exercice de type « développer-réduire » suivant : « (9x-5)(-6x+2) ». Notons qu'en prenant ainsi un groupe homogène, des classifications triviales (par exemple, celles où les élèves seraient simplement regroupés par niveau) sont évitées. Par ailleurs, le choix des classes de seconde en situation S1 a été effectué car il permettait de constituer le plus grand effectif de données au moment des analyses.

Classiquement, les variables statistiques ont été prétraitées : elles ont été centrées sur la moyenne et réduites par la variance. Ce prétraitement est nécessaire dans les algorithmes de classification, afin de ne pas biaiser le poids relatif des différents traits lors du calcul des distances entre données.

Les trois algorithmes produisent des résultats cohérents sur l'exercice considéré, traité par 180 élèves. Soulignons que la classification ne prend pas en compte la variable « note », qui conduirait à une partition triviale en deux groupes : échec/succès. On obtient 4 groupes homogènes (tableau 7), mais qui ne recouvrent que la moitié des élèves. Les descripteurs statistiques utilisés dans ce travail préliminaire ne permettent pas de faire apparaître des régularités au sein de l'autre moitié des élèves. Majoritairement (66%), ces derniers n'ont pas réussi à résoudre l'exercice correctement. L'observation au magnétoscope montre une grande disparité de comportement chez ces élèves, ce qui explique la difficulté de les classer.

Groupe	***Effectif***	***Interprétation***
A	45	Elèves ayant très majoritairement réussi en un temps plus court que la moyenne, avec un nombre d'action proche de la moyenne.
B	12	Elèves ayant plutôt réussi l'exercice, mais en interagissant beaucoup plus que le groupe A avec Aplusix en termes d'actions et d'étapes, et ce dans un temps comparable au groupe A.
C	23	Elèves ayant un comportement très semblable au groupe A, mais faisant une erreur de calcul, les amenant à un résultat faux
D	10	Elèves passant beaucoup moins de temps que la moyenne sur l'exercice, avec un faible nombre d'actions effectuées (abandon)

Tableau 7 : *Caractérisation des groupes d'élèves obtenus par classification.*

Lorsqu'on examine au magnétoscope le comportement des élèves du groupe C, on constate que, bien qu'il s'agisse à chaque fois d'une erreur ponctuelle, la gravité de celle-ci varie fortement. Elle va d'une simple erreur de calcul (ex : 6 fois 9 = 64) à l'oubli pur et simple d'un monôme (ex : le terme en x^2). La prise en compte de variables caractérisant la sémantique des expressions manipulées par l'élève permettrait sans doute d'obtenir une classification plus fine.

5 Conclusion

L'étude, sur la population d'élèves de première S, montre que même des élèves de ce niveau manquent de technicité dans certains types d'exercices standard dès que l'on considère certaines valeurs de variables. Un autre résultat concerne la mise en évidence d'une proportion importante d'élèves qui ne peuvent s'adapter à des situations nouvelles même relativement proches de situations standard. On peut penser que les résultats auraient été encore plus faibles si les expressions comportaient des radicaux. Nous avançons deux hypothèses de ce phénomène didactique. Une première raison peut être trouvée du côté institutionnel, dans les injonctions des programmes de collège[2] et de seconde[3], qui demandent, depuis plusieurs années, à limiter les activités purement formelles. Or, ce travail n'est pas repris en première, alors que les compétences sont sollicitées en analyse à travers l'étude de fonctions rationnelles ou de fonctions comportant des radicaux. Nous avions déjà montré l'existence *d'un vide institutionnel à propos des compétences formelles dans l'analyse au lycée* [Bronner 1997] : « Ainsi une rupture importante apparaît encore sur l'objet racine carrée entre l'approche douce – par délimitation de la complexité des expressions en troisième et seconde, et une certaine libération en première et terminale qui nécessite des compétences techniques plus importantes ». Une autre raison de ce phénomène didactique, qui vient d'une certaine manière en corollaire de la première, est le manque de prise en compte systématique par les enseignants[4] des variables didactiques repérées dans cette recherche, alors que nous avons montré qu'elles étaient encore sensibles en première S.

Les approches par classification automatique sur les classes de secondes nous ont permis de constater la présence de modes de résolution différents selon les élèves. Afin d'obtenir des classes plus représentatives des conceptions spécifiques des élèves, nous étudions les variations des liste des règles de réécriture applicables lorsqu'un élève passe d'une expression à l'autre. Cette analyse permettra une caractérisation formelle des transformations effectuées par l'élève et devrait conduire à obtenir une meilleure caractérisation des types de comportements.

Comme indiqué dans l'introduction, notre objectif général est de déterminer des conceptions d'élèves particuliers en algèbre, ainsi que des conceptions prototypiques. Les travaux présentés dans cet article constituent un pas dans ce sens.

---

[2] A propos des problèmes numériques « Ce sont ces études qu'il convient de privilégier et non pas la technicité » (Programme de troisième, 1999)

[3] « Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres » (Programme de seconde, 2000)

[4] Cela peut être confirmé par l'examen des manuels de troisième ou de seconde.

Ils vont se poursuivre par un travail visant à déterminer les règles utilisées par les élèves ainsi que les stratégies. Ils seront conduits en associant des études manuelles à des études automatiques.

6 Bibliographie

[BLATT ET AL.1997]. Blatt M., Wiseman S. et Domany E. (1997) Neural Computation 9, 1805.

[BOUHINEAU ET AL. 2001] Bouhineau D., Nicaud J.F., Pavard X., Sander E. (2001). Un micromonde pour aider les élèves à apprendre l'algèbre. Actes des sixièmes journées EIAO. Hermès. Paris.

[BRONNER 1997] Bronner A (1997). Etudes didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, Thèse de didactique des mathématiques, Univ. Joseph Fourrier, Grenoble.

[BROUSSEAU 1981] Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, RDM Vol 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble

[BURTON 1982] Burton R. R. (1982). Diagnosing bugs in a simple procedural skill. In D. Sleeman & J.S. Brown (eds) Intelligent Tutoring System, Academic Press.

[DAY ET AL. 1984] Day W., Edelsbrunner H. 1984. Efficient Algorithms for Agglomerative Hierarchical Clustering Methods. Journal of Classification. Volume 1. pp 1-24.

[JAIN ET AL. 1999] Jain A. K, Murty M. N, Flynn P .J (1999). Data Clustering : A review. ACM Computing Survey, Vol 31, N°3, September 1999.

[JEAN 2002] Jean S. (2002). Un système d'assistance au diagnostic de compétences en algèbre élémentaire. Sciences et technique éducatives, vol. 9, n° 1-2.

[KOEDINGER ET AL. 1997] Koedinger, K. R., Anderson, J. R., Hadley, W. H., & Mark, M. A. (1997). Intelligent tutoring goes to school in the big city. Int. Journal of Artificial Intelligence in Education, 8.

[MCQUEEN 1967] McQueen J. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations, Procs of 5th Berkeley Symposium on Math statistics and probability, pp 281-297.

[NICAUD ET AL. 2002] Nicaud J.F., Bouhineau D., Huguet T. (2002). The Aplusix-Editor: a new kind of software for the learning of algebra. Proceedings of ITS 2002. Biarritz.

[NGUYEN-XUAN ET AL. 1993] Nguyen-Xuan A., Nicaud J.F., Gélis J.M., Joly F. (1993). Automatic diagnosis of the student's knowledge state in the learning of algebraic problem solving. AI-ED'93, Edinbourgh.

[PAYNE & SQUIBB 1990] Payne S.J., Squibb H.R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of errors. Cognitive Sciences, 14.

[SLEEMANN 1983] Sleemann D. (1983). Inferring student models from intelligent computer-aided instruction. In Michalski, Carbonell and Mitchell (eds): Machine learning: An artificial intelligence approach. Morgan Kaufmann.