ET PLUS ILS RAMAIENT...
(réponse à l'article de F. Boule paru dans le bulletin n°57)

Christophe CAIGNAERT

DU SOMBRE...

L'éditorial du bulletin n° 57 de l'EPI m'a immédiatement fait repenser à un épisode des shadoks. Ceux-ci sont venus en bateau sur la planète gibi ; obligés de fuir, ils se précipitent dans leur bateau et se mettent à ramer comme des fous. N'ayant pas détaché leur bateau du quai, ils n'avancent pas. Réflexe shadok, ils se mettent à ramer plus fort. Et, situation caricaturale de proportionnalité, ce commentaire : "plus ils ramaient, plus ils n'avançaient pas...".

Il semble qu'il en soit de même pour l'informatique dans l'enseignement : beaucoup de gens rament, à un moment ils furent même très nombreux, mais ils s'aperçoivent qu'ils n'avancent pas. Alors, ils rament plus fort. Pour l'éditorial, il est en quelque sorte décevant quand on rame aussi fort de ne pas avancer et il nous faut donc ramer encore plus fort... Encore un effort camarade !

Bien sûr, la parabole shadok n'est qu'une parabole et n'exprime donc pas de vérité en elle-même. On doit cependant se poser la question : quelle est donc cette aussière qu'on a oubliée et qui nous retient au quai ? Et également cette autre question : pourquoi l'informatique dans l'enseignement n'est-elle même plus une arlésienne ?

DU CLAIR...

Sans que cela y paraisse d'ailleurs immédiatement, l'article de F. Boule "Mathématiques et Informatique", dans ce même numéro, porte sur le même sujet. Cet article est destiné à faire le point sur les relations des mathématiques et de l'informatique. Le contraste entre l'intérêt de l'article et, de l'aveu même de l'auteur, le peu de choses concrètes vraiment intéressantes au moment du bilan m'a réellement surpris.

On y passe très rapidement sur les outils : tableur, traitement de texte et simulation, mais aussi calculatrice. Trop rapidement à mon sens puisque les calculatrices, graphiques en particulier, ont transformé dès aujourd'hui une partie de l'enseignement des mathématiques, dans le secondaire au moins. [1]

F. Boule pose alors une bonne question : "Qu'enseigner et à quelle fin ?". Ceci est une très bonne question pour le formateur d'enseignants qu'il est. Ce n'est pas nécessairement une bonne question pour l'enseignant λ. J'appelle λ-enseignant celui qui a des élèves qui préparent un examen, un concours ou le passage dans la classe supérieure sur un programme donné. N'oublions pas que le l-enseignant est justement celui qui enseigne et que pour lui cette question n'en est le plus souvent même pas une... Il a un programme à faire assimiler et c'est déjà pas mal !

DES PROGRAMMES...

Je ne reviens pas non plus sur la particularité des mathématiques que sont ces notions de rigueur, de démonstration. Signalons simplement que cette notion de rigueur est toute relative : tel résultat devra par exemple faire l'objet d'une démonstration particulière à un stade donné et sera considéré comme une évidence deux ans plus tard pour les mêmes élèves avec le même enseignant... D'autre part ceci ne semble pas trop concerner l'informatique dans l'enseignement, encore que cette relativité ne simplifie sans doute pas les choses. Un programme demandant des démonstrations devra nécessairement en tenir compte ou se limiter à un niveau précis.

L'enseignant de mathématiques a ainsi principalement des notions à faire acquérir à ses élèves : celles du programme officiel de la classe considérée. Les activités que ceux-ci devront être capable de faire peuvent, arbitrairement, schématiquement et abusivement, être classées en deux catégories : les exercices de répétition et les exercices d'initiative. Ceci pour simplifier bien que, bien entendu, la gamme des exercices et problèmes est beaucoup plus "continue" que cela. Je serai donc volontairement caricatural.

---

1 Signalons que F. Boule ne traite que de l'école et du collège et par ailleurs soulève le problème.

DU RÉPÉTITIF...

Dès qu'on quitte le domaine particulier de la maternelle, il existe dans chaque programme une série d'activités qu'un élève doit savoir faire absolument automatiquement et pour lesquelles il ne doit pas y avoir pour lui besoin de réfléchir. Un entraînement systématique est souvent nécessaire pour y arriver et cela a fait le bonheur des "exerciseurs systématiques" sur fiches ou sur support informatique. Ceux ci ont en général beaucoup déçu les enseignants car ils n'apportent la plupart du temps rien de nouveau si ce n'est au niveau des couleurs hideuses et de la musique stupide qui les caractérisent parfois.

Le fait que beaucoup de formateurs en informatique aient préconisé ce type d'activités (car une présentation plus attrayante aurait selon eux permis de lutter contre l'échec scolaire 2) explique en partie au moins le fait que beaucoup d'enseignants aient déjà quitté le navire (radeau ?) de l'informatique.

DES INITIATIVES À PRENDRE...

Beaucoup plus rares sont les programmes d'EAO où les élèves ont réellement besoin de prendre des initiatives pour résoudre un problème donné. Ceci s'explique facilement par le fait que si on peut prendre une initiative, on peut en prendre une autre qui conduit aussi au résultat ! Quel est le professeur de mathématiques qui n'a jamais été surpris par une solution qu'il n'attendait pas, mais cependant correcte et même quelquefois brillante ? Le programme d'EAO doit donc alors comprendre un peu ce qui se passe pour pouvoir répondre intelligemment à chaque proposition !

Il y a ainsi par exemple une difficulté à concevoir un programme d'EAO sur la proportionnalité. En effet, je cite F. Boule : "La proportionnalité, dont on sait qu'elle est malaisément maîtrisée à l'école, donne lieu à des représentations multiples. C'est peut-être d'ailleurs cette pluralité d'évocations (leur hétérogénéité et l'absence de dominance de l'une sur les autres) qui est la cause de cette résistance". Ceci signifie qu'un problème relevant de la proportionnalité peut quasiment toujours se résoudre de différentes façons, et que même de temps à autre, il y a intérêt à changer de point de vue...

---

2 Je ne l'invente pas !...

Toutes choses "difficiles" à gérer pour un concepteur de programme. N'oublions pas en effet que l'ordinateur ne sait pas au fond ce qu'est la proportionnalité. Vous avez compris, voilà au moins une de ces aussières qui empêche le bateau informatique de partir. On y reviendra.

DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE...

Il est clair que si on avait des machines qui comprennent ce qu'elles font, ce serait plus facile. Ce qui oblige à se poser une autre question : qu'est ce que comprendre ce qu'on fait ? Rassurez vous, je n'y répondrai pas, mais on peut dire que quand un élève a compris ce qu'est la proportionnalité, il est capable par exemple de changer de lui-même de point de vue pour résoudre son problème...

Le problème n'est pas ici de savoir si l'IA est possible, probable ou pas [3], la question n'est pas non plus de savoir si l'éducation nationale a les moyens ou pas de se payer les machines nécessaires à l'IA, la situation du point de vue matériel évoluant beaucoup trop vite.

Non, le problème vient ici de ce que la multiplicité des points de vue, comme dans la proportionnalité, n'est pas en mathématiques l'exception, mais la règle. Les mathématiques sont une unité même si cela n'apparaît pas au premier abord et il est ainsi par exemple très souvent profitable de changer de point de vue, de considérer quelque chose comme on dit, pour résoudre un problème donné.

UN PREMIER EXEMPLE

Essayons de factoriser sur R l'expression $X^{20}-1$.

Le meilleur résultat que m'ait donné un logiciel disponible est :

$$(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)(X^2+1)(X^8-X^6+X^4-X^2+1)$$

c'est Mathématica (Wolram Research) qui me l'a donné sur un Mac II.

Ceci n'est pas mal mais malheureusement c'est loin d'être terminé car, en théorie, on doit pouvoir obtenir un produit d'expressions du premier degré et d'expressions du second degré à racines conjuguées non réelles, c'est-à-dire ici du type $(X^2+\alpha X+1)$ avec α réel.

---

3 Renvoyons le lecteur à H. Dreyfus, *Intelligence artificielle, mythe et limites*, et à D. Hopstadter, *Gödel, Escher, Bach.*

En effet, dans ce cas, toutes les racines sont les racines 20èmes de l'unité, donc de module 1, donc leur inverse est leur conjuguée. D'autre part, les seules racines réelles sont évidemment 1 et -1 et sont simples.

Donc les deux expressions du quatrième degré se factorisent par identification en $(X^2+\alpha X+1)(X^2+\beta X+1)$. On trouve à chaque fois α et β en résolvant une équation du second degré en somme et produit. (la somme $\alpha+\beta$ est ici 1 ou -1, le produit $\alpha\beta$ est -1).

Reste donc l'expression du huitième degré : en posant $Y=X^2$, on se ramène à la seconde expression du quatrième degré précédente, mais en Y. On factorise en produit de deux expressions du second degré en Y, c'est-à-dire deux expressions du quatrième degré en X qu'on retraite par identification de la même façon que précédemment. Et c'est terminé !

L'intérêt ici n'est pas le résultat dont je vous fait grâce mais qui permet de calculer par exemple la valeur exacte (en radicaux) de $\cos(\pi/10)$... Non, l'intérêt est que, compte tenu de ce qu'on sait sur les racines Nièmes de l'unité, la factorisation par identification, qui normalement échoue (on retombe en général sur l'équation de départ, essayez avec une expression du second degré), réussit ici. Et ce logiciel qui sait faire en général des choses plus complexes et plus évoluées que celle-ci bloque devant ce problème très élémentaire pourtant car il n'a pas l'idée que par identification ça marchera... Lors de la programmation de ce logiciel, on n'a pas bien sûr envisagé de factoriser des polynômes par identification puisque ça ne marche pas !

Ce logiciel se trouve ainsi incapable de relier ses connaissances élémentaires pour prendre une initiative. Certes, il ne s'agit pas ici à proprement parler d'IA mais on peut se rendre compte facilement qu'il est important d'avoir des idées pour avancer dans une situation. Et qu'une part importante de l'enseignement consiste aussi à essayer d'apprendre aux élèves à prendre ces initiatives.

UN AUTRE EXEMPLE

Je ne résiste pas à la tentation de vous donner un autre exemple [4], il s'agit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists P \in \mathbf{R}[X] \quad P(X+1)-P(X) = X^n$$

Le premier réflexe est de se mettre à calculer comme un fou un polynôme P qui convienne, au besoin par récurrence. On s'aperçoit rapidement qu'il convient de savoir manipuler efficacement les terribles coefficients binomiaux... Pas simple ! Il existe heureusement une autre solution bien plus élégante.

Appelons $\mathbf{R}_m[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus m. C'est un espace vectoriel de dimension m+1.

Considérons Φ de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ qui à P(X) associe P(X+1)-P(X).

C'est une application linéaire. Des petites considérations de degré nous montrent que le noyau de Φ est réduit aux polynômes constants donc ce noyau est de dimension 1. Le théorème du rang nous indique alors que F est surjective car les deux espaces sont respectivement de dimension n+2 et n+1 et la dimension de l'image (le rang) est bien de dimension (n+2)-1, la dimension de l'espace d'arrivée. L'antécédent de X^n par Φ convient donc et c'est terminé. Je n'ai aucune idée de l'allure du polynôme cherché mais je sais qu'il existe. Élégant, non ?

Je n'ai jamais vu aucun logiciel à qui je puisse simplement envisager de donner cette solution, de là à ce qu'il puisse la comprendre, il semble qu'on soit loin du compte. Ce qui est exemplaire ici, c'est le changement de cadre qui permet en quelque sorte de passer à la vitesse supérieure. Ce problème n'est pas à priori un problème d'algèbre linéaire en dimension finie et pourtant c'est comme cela qu'il se résout le plus facilement.

C'est pourquoi j'ai le sentiment que la situation est bloquée : pour l'instant au moins, faire des mathématiques pour une machine ou un être humain, ce n'est pas la même chose. L'un comprend, l'autre pas. Une machine capable de résoudre des problèmes sur des polynômes doit donc avoir entre autres de sérieuses notions d'algèbre linéaire... Ça n'est pas pour tout de suite en tous cas !

---

4 Rassurez-vous, ce sera le dernier. Cependant, savez-vous que dans un polygône régulier à n côtés tel que la distance des sommets au centre de gravité est 1, le produit des distances de tous les autres sommets à un sommet donné est n ? Ceci se montre facilement en considérant la dérivée en 1 de x^n-1 et le plan complexe...

DES MACHINES À ENSEIGNER ?

On est donc amené à reconsidérer le problème des mathématiques et de l'informatique : ou la machine cherche à enseigner ou non.

Dans le cas où la machine ne cherche pas à enseigner, on a les usages actuels les plus importants : le tableur, les calculatrices, LOGO et même Euclide pour la géométrie ne sont pas des machines à enseigner mais des outils bêtes qui font un certain nombre de choses. En un sens, ils servent naturellement. Ces logiciels ne nous apprennent rien, on apprend avec eux. En quittant le domaine des mathématiques, c'est aussi le cas par exemple du traitement de textes.

Dans le cas contraire où la machine cherche à enseigner, il nous faut encore séparer le cas répétitif répandu mais souvent inintéressant du cas où il faut prendre des initiatives.

Dans le cas où il faut prendre des initiatives pour résoudre le problème posé, les limitations sont immédiates et évidentes. En effet, pour le moment au moins, et quel que soit le sens qu'on donne à ce mot, la machine ne comprend pas ce qu'elle fait et est d'ailleurs incapable de résoudre le problème qu'elle demande de résoudre ! Ce n'est donc pas a priori un bon enseignant, à moins d'admettre qu'on puisse être un bon enseignant sans maîtriser les notions qu'on enseigne.

Quand on pense qu'en plus elle manque singulièrement de culture générale mathématique, culture générale dont on a montré qu'elle était souvent très utile et même parfois indispensable pour résoudre un problème, le tableau est complet.

UN ESPOIR ?

J'avais annoncé mon intention d'être caricatural, le résultat est donc sec, aride, dur. Ceci dit, il y a des choses à faire avec les outils informatiques existants et il y a aussi des logiciels ponctuels intéressants, F. Boule en cite un certain nombre. Mes propos vont donc bien plus loin que ma pensée. Il s'agit principalement de susciter le débat.

Il n'est pas non plus interdit de penser que peu à peu, les machines comprendront de plus en plus de choses et que tout cela va évoluer. Il faut cependant se méfier, quand les choses sont mal définies, et cela me semble être le cas ici, ce n'est pas parce qu'on avance vers le but qu'on s'en approche. Essayez un peu de marcher jusqu'à la ligne d'horizon !

J'espère simplement ici avoir aidé un peu à comprendre pourquoi, comme le conclut F. Boule : "en matière d'informatique pédagogique pour les mathématiques les logiciels sont sans doute nombreux depuis dix ans, mais les idées plutôt rares". Quand on voit un peu par quoi on est attachés au quai, c'est-à-dire les limites de tout logiciel destiné à enseigner une notion, c'est le contraire qui aurait été étonnant !

C'est assez difficile de faire faire des choses intelligentes à quelqu'un qui ne comprend rien à ce qu'il fait et qui en plus manque singulièrement de culture dans le domaine donné !

Voilà ma contribution à la réflexion de fond demandée par notre collègue, en souhaitant que le vaste débat demandé s'instaure.

Christophe CAIGNAERT
Lycée Colbert, Tourcoing