

**LE CALCUL FORMEL**  
**Une introduction aux logiciels**  
**MAPLE et MATHEMATICA**  
**(2ème partie)**

**Jean-Paul ROY**

### **Le Système MAPLE V**

Pur produit universitaire, le projet Maple a vu le jour en 1980 à l'Université de Waterloo (Canada) au sein du Symbolic Computation Group. Ecrit dans un langage portable générant du C, Maple a pu être implémenté depuis dix ans sur une large gamme de machines, et le système en est donc maintenant à sa cinquième version, alors que Mathematica à sa seconde seulement. C'est dire qu'il s'agit d'un produit mûr, mais qui ne s'est que récemment ouvert à la micro-informatique, plutôt habitué aux stations de travail qu'aux Macintosh, Amiga ou IBM-PC (là aussi, un 80386 est nécessaire). La version utilisée est celle du Macintosh, avec coprocesseur arithmétique (optionnel). Maple demande moins de place-mémoire que Mathematica (2Mo sur Macintosh, 4Mo sur PC).

D'interface très pauvre jusqu'à présent, Maple introduit avec sa version V le concept de feuille de travail (worksheet), sous la pression des notebooks adresses qui conservent néanmoins l'avantage. Le travail est confortable, avec quelques options d'édition, mais pas d'hypertexte en vue. Par contre, le manuel [9] est quasiment en ligne, avec des fenêtres d'aide complètes, contenant principes et exemples.

Voici un exemple pour les lycéens qui apprennent à utiliser les dérivées de fonctions pour résoudre des problèmes d'optimisation. Il est extrait du précieux recueil [10] d'exercices sur *Maple*. Il s'agit d'établir la « loi de Snell » (1621), qui dit la chose suivante (enfin presque). Un bateau amphibie doit aller du point P (dans la mer) au point R (sur terre) avec une vitesse uniforme en mer (resp. sur terre) égale à  $v_1$  (resp.  $v_2$ ). Montrer que le temps du trajet est minimum à condition de passer par le point Q tel que :

$$\sin(B)/\sin(A) = v_2/v_1$$

**Worksheet "Loi de Snell"**

0 2 4 6 8 10 12 14

t ↑ ↑ ↑    Input    Output    Text

- $D1 := a/\cos(A)$ ;  $D2 := a/\cos(B(A))$ ;
- $b := a*\tan(A) + a*\tan(B(A))$ ;
- $T1 := D1/v1$ ;  $T2 := D2/v2$ ;
- $T := T1 + T2$ ;

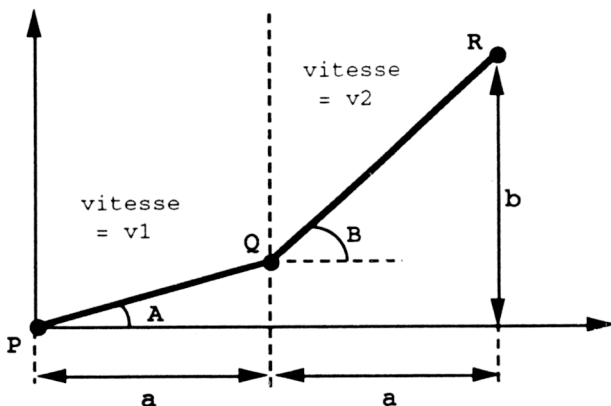
$$T := \frac{a}{\cos(A) v1} + \frac{a}{\cos(B(A)) v2}$$

- $\text{Eqn1} := \text{diff}(b,A) = 0$ ;

$$\text{Eqn1} := a (1 + \tan(A)^2) + a (1 + \tan(B(A))^2) \left| \frac{d}{dA} B(A) \right| = 0$$

128K    2,748K

Nous utiliserons les outils de dérivation, de trigonométrie, et de substitutions dans les équations.



# Une fois l'angle A choisi, l'angle B est forcé. Nous exprimerons  
 # que B est fonction de A en l'écrivant B(A). Quelques distances :  
 $D1 := a/\cos(A)$ ;  $D2 := a/\cos(B(A))$ ;  
 $b := a*\tan(A) + a*\tan(B(A))$ ; # un : pour ne pas voir le résultat  
 # Le temps total est donc :  
 $T := D1/v1 + D2/v2$ ; # un : pour le voir.

$$T := \frac{a}{\cos(A) v1} + \frac{a}{\cos(B(A)) v2}$$

# Nous souhaitons minimiser le temps  $T$  sous la contrainte  $b = Cte$

**Eqn1 := diff(b,A) = 0;** # car  $b$  ne dépend pas de  $A$

$$\text{Eqn1} := a \left(1 + \tan(A)\right)^2 + a \left(1 + \tan(B(A))\right)^2 \left| \frac{dB(A)}{dA} \right| = 0$$

**Eqn2 := diff(T,A) = 0;** # pour trouver le minimum de  $T(A)$

$$\text{Eqn2} := \frac{a \sin(A)}{\cos(A)^2 v1} + \frac{a \sin(B(A)) \left| \frac{dB(A)}{dA} \right|}{\cos(B(A))^2 v2} = 0$$

# Résolvons l'équation *Eqn1* par-rapport à la variable  $dB/dA$  :

**Bprime := solve(Eqn1,diff(B(A),A));**

$$\text{Bprime} := - \frac{a + a \tan(A)^2}{a + a \tan(B(A))^2}$$

# Oui, Maple aurait pu simplifier par  $a$ . Tant pis pour lui...

# Par substitution, portons la valeur  $dB/dA$  trouvée ci-dessus dans *Eqn2*

**subs(diff(B(A),A)=Bprime,Eqn2);**

$$\frac{a \sin(A)}{\cos(A)^2 v1} - \frac{a \sin(B(A)) (a + a \tan(A)^2)}{\cos(B(A))^2 v2 (a + a \tan(B(A))^2)} = 0$$

# Là, c'est un peu trop compliqué. Simplifions un peu :

**simplify(");** # le symbole " fait référence au dernier résultat

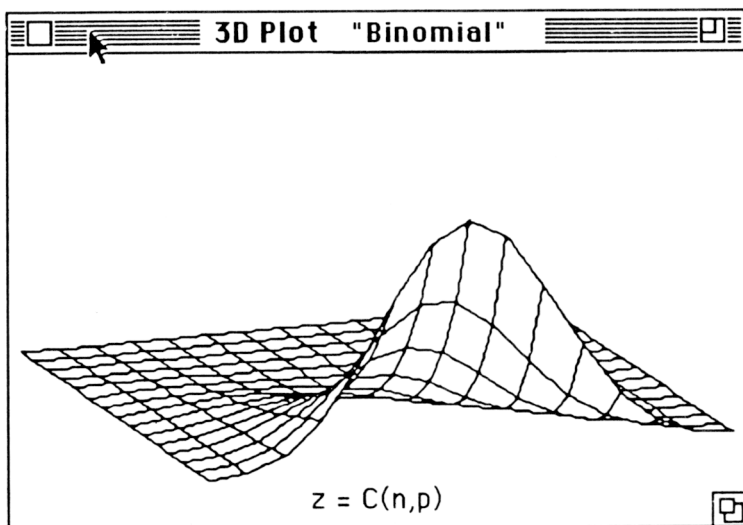
$$- \frac{a (- \sin(A) v2 + \sin(B(A)) v1)}{\cos(A)^2 v1 v2} = 0$$

# Le résultat s'obtient en annulant le numérateur ! CQFD...

Bien sûr, faute de place, nous avons choisi un exemple qui se ferait sans problème à la main, mais réfléchissez à l'élève qui peut ainsi se concentrer sur la stratégie des calcul sans se perdre dans les détails des simplifications. N'est-ce pas une forme d'algorithmique ? Il est facile par exemple de reconstruire l'intégrale d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a,b]$  en laissant MAPLE faire les calculs (lourds) des sommes de Riemann, avec des formules du type :

```
troncature := sum(f(a+i*(b-a)/n),i=0..n-1);
aire := limit(troncature,n=infinity);
```

Un bémol néanmoins. Les logiciels de calcul formel ne font pas toujours dans la dentelle, et n'auront aucun scrupule à vous afficher  $x$  au lieu de sa valeur absolue si vous demandez la racine carrée de  $x^2$ . Ceci n'est pas forcément définitif et tient à l'état de l'art (des améliorations sont régulièrement annoncées dans ce sens). C'est pourquoi une formation est indispensable, d'autant que ces logiciels se diffuseront tôt ou tard parmi les élèves, et un laisser-aller peut entraîner des catastrophes.



# Les  $\text{binomial}(n,p)$  sont les coefficients du binôme de Newton.

```
plot3d(binomial(n,p),n=0..10,p=0..10,
orientation=[-20,60], title=`z = C(n,p)`);
```

Maple, plus ancien et destiné à un public jusqu'alors spécialisé, avait tout misé sur ses algorithmes, et avait pris du retard sur Mathematica au niveau du langage, de l'ergonomie et du graphisme. Si la version V intègre dorénavant le graphisme 3D en couleur (cf. la « *surface binomiale* »), elle reste néanmoins sur ces aspects légèrement en-deçà de son rival (le langage est rapide mais un peu vieillot, la « *worksheet* » n'a pas la qualité du « *note book* »). Par contre, la bibliothèque de Maple s'est encore enrichie (avec des packages de géométrie euclidienne et projective entre autres) et Mathematica, logiciel jeune, a encore du chemin à faire de ce côté-là malgré les nombreux packages en domaine public. Il n'est d'ailleurs pas dit qu'il le fasse, et les études de marché l'engageront peut-

être dans des voies nouvelles à mi-chemin entre le calcul formel « *pur* » et les outils techniques multimédia, mais ce n'est qu'une impression personnelle (les prochaines versions Mathematica intégreront les « *movies* » QuickTime, le standard d'images animées Apple). Le nombre et la qualité des ouvrages publiés de part et d'autre seront de toutes façons un atout décisif pour la diffusion *massive* de ces systèmes dont l'approche reste tout de même délicate.

## CONCLUSION

Nous espérons avoir suscité l'envie de jeter un coup d'oeil sur ces nouveaux outils. Pour au moins deux raisons. L'enseignant peut utiliser un logiciel de calcul formel pour préparer ses exercices, trouver les bonnes valeurs numériques ne donnant pas de résultats trop compliqués ou de courbes trop bizarres, etc (oui, aussi pour corriger...). De son côté, l'élève peut - avec une formation indispensable - s'en servir pour vérifier des résultats ou acquérir plus vite des stratégies algorithmiques menant des énoncés aux solutions. Combien d'élèves ne s'engagent pas dans une voie conduisant à la *bonne* solution dès qu'ils sentent de gros calculs intermédiaires à l'issue incertaine ? Allons-nous former en priorité des mathématiciens ou des utilisateurs des mathématiques ? Mais peut-être certains voudraient-ils simplement nous voir utiliser cette merveilleuse discipline pour barrer la route à ceux qui pourraient avoir des idées mais qui manquent de souffle dans les calculs, pour des raisons *x* ou *y* ?

La seconde raison d'y aller voir intéressera les (anciens ?) enseignants de l'option informatique, dont je fus. Une piste possible - pour les élèves scientifiques en tout cas - pourrait consister à utiliser un logiciel de calcul formel (Maple ou Mathematica) disposant d'un langage de programmation pour enseigner à la fois *des* mathématiques et *de* la programmation. Plutôt que d'énoncer les algorithmes sur des structures de données abstraites, pourquoi ne pas viser les objets de la mathématique ? Qu'y-a-t-il de plus arborescent qu'une formule ? De mieux à trier qu'un polynôme ? De plus récursif que la combinatoire ? De plus graphique qu'une surface ? De plus ludique qu'une courbe  $y = f(x)$  que l'on « *joue* » à-travers le haut-parleur et dont l'oreille localise les asymptotes verticales (Mathematica) ? Encore une fois limités aux scientifiques, les objectifs accessibles rejoignent et amplifient ceux du volant programmation de l'option informatique. Et le caractère d'*outil* scientifique du logiciel employé empêche de n'y voir qu'une « *simple* »

activité de programmation (dont par ailleurs je ne conteste pas les qualités).

L'option informatique de l'agrégation de Maths s'intéresse aux facettes mathématiques de la programmation : peut-être gagnerait-elle à s'ouvrir aussi à l'informatisation des mathématiques. Les techniques de calcul formel pourraient y avoir leur place.

Le puissant langage de programmation sous-jacent (qui manque à DERIVE) offre de plus la possibilité pour l'enseignant (ou l'éditeur de logiciels) d'écrire des didacticiels interactifs, puisque la réponse de l'élève peut souvent être mise « *sous forme canonique* » (cf. le logiciel « *Intégrale* » développé sous Mu-Math). Plus intéressante encore serait une aventure « *intelligente* » dans ces systèmes maintenant largement diffusables. Il leur manque en effet l'essentiel pour en faire des outils pleinement éducatifs : l'explication de leur solution. Ce n'est pas facile, car souvent les algorithmes utilisés demandent pour des problèmes simples des connaissances mathématiques très avancées (en intégration par exemple). Le logiciel de calcul formel ne raisonne pas comme l'élève, d'où l'intérêt pédagogique de l'utiliser non pas pour sa propre expertise en résolution de problèmes, mais pour le cadre tout prêt qu'il offre à l'enseignant-programmeur en lui permettant de reconstruire de manière algorithmique les stratégies de calcul qu'il enseigne (par exemple l'intégration par parties, ce qui est un peu l'approche du package « *student* » de Maple).

Mais pour l'instant, nous cheminons doucement vers la situation qui prévalait au moment de l'apparition des premières calculettes; attendons-nous à terme à du brouhaha, des résistances, à des élèves qui auront ces outils chez eux. Puissent les enseignants (eux-mêmes formés...) leur en montrer l'utilisation afin qu'ils s'en servent à bon escient. Il faudra aussi évaluer l'impact social et sélectif d'une pratique plus « *technicienne* » des mathématiques. Voilà du travail pour des lustres...

Jean-Paul ROY

Département d'Informatique  
Faculté des Sciences de Nice

*P.S. Je remercie les sociétés Waterloo Maple Software et Wolfram Research d'avoir mis à ma disposition les dernières versions de leurs logiciels Maple V et Mathematica 2.0 sur Macintosh pour écrire cet article.*

**Dernière minute :**

Nous signalons l'ouvrage en français qui vient juste de paraître, « *Guide d'initiation à Mathematica 2* » T. Gray & J. Glynn, Addison-Wesley France, 260 pages, 1993.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [9] : *Maple V Language Reference Manual*, by B. Char & al. Springer-Verlag 1991.  
*Maple V Library Reference Manual* , by B. Char & al. Springer-Verlag 1991.  
*First Leaves. A tutorial Introduction to Maple V*, by B. Char & al. Springer-Verlag 1991.
- [10] : *Maple Calculus Workbook*, by K. O'Geddes & al.,  
Disponible directement chez Waterloo Maple Software.