Informatique et enseignement des mathématiques : le temps de la maturité (?)

Jean-François Canet

INFORMATIQUE ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES. LE TEMPS DE LA MATURITÉ (?)

J.F. CANET

UN COUP D'ŒIL PANORAMIQUE

Si on essaie de regarder ce dont on dispose aujourd'hui comme "moyens informatiques" susceptibles d'apporter une aide dans l'enseignement des mathématiques on est surpris de la variété et de la qualité des produits rencontrés.

Les logiciels sont nombreux

De façon très schématique on peut distinguer :

- des logiciels permettant aux élèves d'approfondir une notion, de s'entraîner, de faire des exercices sur un point précis de cours à un niveau bien défini,
- des imagiciels permettant d'illustrer une notion mathématique à un niveau donné,
- des outils généraux permettant de traiter un aspect des mathématiques indépendamment d'un niveau donné (construction géométrique, tracé de courbe, calcul algébrique et infinitésimal).

Il faut bien sûr remarquer que ces trois catégories ne sont pas disjointes, les auteurs d'un produit ont souvent l'intention d'offrir deux ou trois des fonctionnalités précédentes, mais une des "philosophies" reste dominante ; les enseignants peuvent "détourner" un logiciel, un logiciel de construction géométrique peut devenir imagiciel, un imagiciel peut devenir banque d'exercices etc.

Il existe une assez bonne adéquation entre logiciels et matériel

Les logiciels de mathématiques n'ont pas été, pour la plupart, victime de l'inflation galopante en capacité mémoire (vive et de masse) ni en temps de calcul. Si l'on compare à dix ans d'intervalle deux produits visant les mêmes fonctionnalités, deux traceurs de courbes ou deux logiciels de calcul formel par exemple, on constate que les tailles mémoire nécessaires n'ont guère plus que doublé, pendant ce temps les traitements de textes ou les tableurs ont vu leur appétit décupler. Le matériel, disponible dans les établissements, essaie plutôt de suivre, avec un certain retard, la croissance des outils bureautiques, si bien que l'utilisateur de logiciels de math se trouve à peu près à l'aise.

Parmi les outils informatiques utilisés en mathématiques il faut naturellement inclure les calculatrices. Ces dernières ont connu une évolution considérable et elles sont aujourd'hui capable d'effectuer des traitements réservés hier aux machines "de bureau". Cette évolution est loin d'être terminée et il est indispensable que tous les enseignants prennent en compte ce phénomène (ce point sera repris dans un paragraphe suivant).

Les usages se diversifient

On voit apparaître de plus en plus souvent des utilisations de l'outil informatique "hors salle informatique", poste unique avec dispositif de visualisation de groupe, postes en libre disposition pour les élèves au CDI. Il faut naturellement ajouter à cela l'usage "privé" que font les élèves de l'outil informatique (qui souvent celui de la calculatrice). Cette modification dans la "configuration didactique" [1] permet une utilisation plus souple et plus fréquente des outils informatiques qui, en quelque sorte, commencent à se banaliser pour certains enseignants de mathématiques.

Les études sur l'impact de l'informatique en mathématiques se multiplient et se diffusent

Les travaux universitaires sont nombreux, on peut naturellement citer les recherches qui concernent le travail en environnement informatique (M. Artigue), l'organisation des séquences lors de l'utilisation de l'ordinateur (F. Bellemain & B. Capponi), la réflexion sur

1 Pour reprendre l'expression qu'emploie Yves Chevallard in "Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques", *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, ed. B. Cornu, P.U.F.

ce que devraient être les tuteurs intelligents (D. Guin), tout le travail mené autour de Cabri-Géomètre, mais aussi les recherches faites sur l'aide à la démonstration en géométrie, sur le calcul formel.

Les IREMs (et l'inter IREM Mathématiques et informatique), les centres de ressources et certaines MAFPEN ont publié et diffusé ces dernières années de nombreuses brochures, contenant des séquences de cours ou des réflexions sur le travail en environnement informatique.

Le Ministère de l'Education (DLC 15) a publié des brochures de synthèse largement diffusées : "*Faire des Mathématiques au collège avec l'ordinateur* "(1993), "*Faire des Mathématiques au lycée avec l'ordinateur*" (1993) et sur le sujet précis des outils de calcul formel "*Enseignement des Mathématiques et logiciels de Calcul formel"* (ces publications du Bureau des innovations pédagogiques et des technologies nouvelles ont été diffusées en grand nombre, on peut s'adresser aux MAFPEN pour les obtenir). Cette direction (devenue depuis la DITN B2) a organisé l'an dernier un stage national "Apports des outils informatiques à l'enseignement des mathématiques au lycée" (Montpellier, mars 1993). Les imagiciels (Creem-Cnam) ont été très largement diffusés dans les établissements.

Chaque année la question de l'apport de l'informatique à l'enseignement des mathématiques fait l'objet de travaux au cours d'universités d'été.

Autre point de vue

D'un autre coté on sait tous que, dans bien des classes de mathématiques, l'outil informatique est ignoré, la calculatrice tolérée mais peu intégrée. En tête des sujets de math dans les examens ou partiels de DEUG on voit bien souvent la mention "*Calculatrice interdite*". Dans notre système éducatif l'importance d'un sujet est bien souvent appréciée à l'aune de la place qu'il occupe dans les examens ou concours. Nous sommes bien obligés de constater que peu d'épreuves sont construites en prenant en compte l'existence de traceurs de courbe, de logiciels de construction géométrique, d'outils de calcul formel, ou même plus simplement de connaissances sur la construction d'un algorithme.

Faut-il en conclure que l'utilisation des outils informatiques en mathématiques reste une affaire de quelques "spécialistes" plus ou moins illuminés et que d'ailleurs ceci passera comme est passé le travail sur les changements de bases, ou celui sur la "théorie naïve" des ensembles ?

Faut-il au contraire conclure que les réticences sont le fait de (dangereux) passéistes qui finiront bien par être à la retraite ?

Il me semble qu'il est surtout nécessaire de se reposer, à cette occasion l'éternelle question de ce que nous cherchons à faire lorsque nous essayons d'enseigner les mathématiques. Naturellement je n'ai pas **la** réponse. Mais je voudrais essayer d'expliquer, à travers quelques exemples, deux ou trois idées qui me semblent importantes.

LA GÉOMÉTRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

"Que je sache, les Eléments de la géométrie consistent aussi en points et traits que nous devons apprendre comment tracer, avant même que d'apprendre que nous ne le pouvons pas." [2]

Un des problèmes majeur de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire est d'aider les enfants à appréhender ce que sont les objets de la géométrie, et de les entraîner à distinguer ces objets des diverses représentations que l'on peut en donner. C'est aussi dans une certaine mesure l'enjeu de cet enseignement (parmi d'autres) que d'apprendre à distinguer (dans certains cas) ce qui représente de ce qui est représenté. Il est certain que dans cette approche la présence de l'outil informatique peut être une aide importante pour multiplier les représentations d'un même objet : un carré peut être représenté par une procédure logo, par une construction Cabri-Géomètre, aussi bien que par le carreau de la feuille de papier, ou le dessin fait à la règle et au compas (ou plus souvent au double-décimètre et à l'équerre), ou encore par une définition donnée avec des mots. La figure obtenue à l'aide l'outil informatique est (relativement) indépendante de sa position sur la page (écran ou papier). L'objet géométrique peut alors apparaître comme ce qui est commun aux diverses représentations.

Un autre enjeu de cet enseignement est "d'apporter une exigence de rigueur dans la pensée et de justesse dans l'expression" [3]. En ce début de scolarité l'adulte accepte, habituellement, de l'enfant un discours encore hésitant et souvent peu précis. L'exigence de justesse dans l'expression est beaucoup plus facile à justifier lorsque l'on doit s'adresser à une machine. Par exemple lors d'un travail dans un cours élémentaire

2 *Les origines de la Géométrie.* Michel Serres, page 297.

3 Programmes et instructions pour l'école élémentaire.

où nous utilisons Cabri-Géomètre [4], nous avons remarqué que des expressions erronées du type “droite perpendiculaire à un point” (pour désigner par exemple la médiatrice d’un segment) disparaissaient très vite du fait de l’obligation de désigner complètement l’objet à construire “droite passant par *ce point* perpendiculaire à *ce segment*”. Toujours au cours de ces mêmes travaux nous avons remarqué l’intérêt des messages envoyés par l’outil qui répète sans se lasser le nom des différents objets pointés (lorsqu’on modifie l’aspect des objets).

Si l’on souhaite permettre au plus grand nombre d’enfants d’arriver un jour à pratiquer des raisonnements et des démonstrations sur des figures géométriques, il est indispensable que nous nous donnions les moyens de faire passer ces exigences de justesse dans le langage, de rigueur dans les définitions. Mais il est aussi nécessaire d’aider les enfants à développer ce que nous appelons “l’imagination”. Il me semble que le fait d’avoir pu manipuler un grand nombre de configurations, d’avoir, implicitement, relevé des invariants de ces configurations ne peut que favoriser cette imagination qui est souvent, en fait, le fruit d’analogies fécondes entre du déjà-vu et du nouveau.

LE CALCUL FORMEL AU COLLÈGE ET AU LYCÉE

L’utilisation des systèmes de mathématiques symboliques [5] fait l’objet de nombreuses études en France et à l’étranger. Le ministère a mis en place, depuis trois ans un groupe de travail qui a publié une brochure sur ce sujet (cf. premier paragraphe). Il semble que ces outils permettent d’**améliorer l’appréhension que les élèves ont des objets qu’ils manipulent** (on retrouve là une situation analogue à la précédente : en permettant d’accéder plus facilement à une multiplicité de représentations, le logiciel aide à discerner les représentations de l’objet représenté, et enrichit le sens de cet objet). Ainsi une fonction réelle pourra être vue comme une écriture algébrique, comme une représentation graphique, comme une table numérique. Chacune des représentations permet de mettre en évidence telle ou telle propriété. En

---

4 Un compte-rendu d’une partie de ce travail doit paraître dans le n° 4 de la revue *ABRACADABRI*.

5 “Le terme *systèmes de mathématiques symboliques* est utilisé pour définir les calculatrices et les ordinateurs offrant, dans un même environnement, des possibilités pour traiter des calculs numériques, des représentations graphiques et des manipulations symboliques.” in Hodgson B., Muller E., 1992, The Impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics Education, *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching,* UNESCO, 93-107.

coordonnant ces représentations, on acquiert une connaissance plus approfondie du concept de fonction. Ce travail est déjà celui que nous faisons avec papier / crayon. La présence du logiciel, qui diminue le coût d'obtention ou de transformation de chacune des représentations permet de se concentrer sur la coordination. Par exemple, dans une classe de seconde, j'ai eu l'occasion de proposer un travail permettant aux élèves de faire le lien entre la fonction définie par $x \mapsto |2x-4|$, la même fonction définie à l'aide d'une conditionnelle, et la représentation de cette fonction. Les élèves ont souvent du mal à identifier l'abscisse du minimum de la courbe comme étant la valeur intervenant dans le test de la conditionnelle, et comme étant la valeur qui annule la quantité dont on prend la valeur absolue.

Ces outils permettent de traiter des problèmes plus riches, plus ouverts. Si un problème, provenant d'une situation concrète, conduit à résoudre un système de sept équations à sept inconnues on hésitera à l'aborder (sans outil de calcul) en seconde ou en première car on sait que l'essentiel de la séance va être consacrée à du calcul, et que la démarche et l'interprétation des résultats ne pourront pas être mis en valeur. On peut aussi proposer aux élèves des problèmes permettant de faire de nombreuses conjectures, le travail proposé ressemble alors à un *vrai* travail de mathématicien (des idées de telles questions sont proposées dans la brochure de la DLC).

Encore faut-il s'approprier l'outil

Pour que l'élève puisse apprendre avec l'outil, il est nécessaire qu'il ait acquis une certaine maîtrise de celui-ci, qu'il ait une idée de ses limites, qu'il considère les résultats obtenus comme des objets lui appartenant suffisamment pour pouvoir les interpréter, les utiliser ultérieurement.

Les outils à notre disposition sont capables de traiter des problèmes de plus en plus complexes. Inévitablement ceci entraîne l'emploi d'un langage plus riche et plus complexe pour communiquer avec la machine. Prenons un exemple hors du domaine des mathématiques : si j'utilise un traitement de texte qui autorise l'emploi de tableau je serais obligé, lorsque je voudrais effectuer une mise en forme, de distinguer les commandes qui s'adressent au texte dans le tableau de celle qui s'adressent au tableau lui-même, de la même façon je peux vouloir supprimer le tableau et le texte, le tableau mais pas le texte, le texte mais pas le tableau. Quels que soient les progrès faits par les concepteurs dans la réalisation des interfaces, la complexité de certains traitements demeure.

Lorsqu'un logiciel est susceptible d'effectuer des traitements formels, donc de manipuler symboliquement des objets qui sont des noms d'autres objets on est conduit à distinguer, dans certains cas, les travaux à faire sur les noms de ceux qui sont à faire sur les objets nommés. Cette distinction est toujours délicate et doit faire l'objet d'un apprentissage.

Il est tout aussi important que les utilisateurs arrivent à se faire une idée des limites de l'outil, les approximations de certains calculs, le caractère discret des représentations graphiques peuvent conduire à des résultats étonnant, de même un logiciel de calcul formel peut être amené à utiliser une règle de simplification "presque toujours vraie" (comme remplacer $\int x^k dx$ par $\frac{x^{k+1}}{k+1}$)[6]. Ces limites ne sont pas toujours simples à cerner, mais font souvent l'objet de problèmes très riches que l'on peut étudier en classe. On pourra consulter, par exemple, sur la question des calculatrices graphiques la brochure "Pour une prise en compte des calculatrices graphiques en lycée" publiée par l'IREM de Montpellier.

En tout état de cause, l'attitude qui consisterait à penser que l'apprentissage des moyens de calcul n'est pas du ressort de l'enseignement des mathématiques revient à condamner la majorité des élèves à un mauvais emploi de ces outils. Il me semble évident que l'extraordinaire développement des calculatrices ne fera qu'accentuer ce phénomène.

Face à un problème on peut <u>très schématiquement</u> distinguer trois étapes :

- Quelle(s) question(s) mathématiques pose ce problème ?
- Quelle(s) réponse(s) apporter à cette (ces) question(s) ?
- Comment comprendre ces réponses dans le cadre du problème ?

Il est possible (et malheureusement fréquent) de rédiger un problème de mathématiques de façon à réduire la première et la dernière étape à une peau de chagrin. Si nous disposons de plus d'un outil qui se charge entièrement de la seconde étape, il ne faut pas s'étonner de

6 C'est ce que fait Mathematica, notons que Derive a l'ingénieuse idée de répondre $\frac{x^{k+1} - 1}{k+1}$ qui a pour limite ln(x) lorsque k tend vers -1.

l'impression que l'on peut avoir de ne plus faire alors de mathématiques. Il est donc nécessaire, si l'on souhaite que l'élève ait l'impression d'avoir une activité mathématique de lui proposer des problèmes rédigés autrement que "Montrez que…, Montrez que…". Construire la figure correspondant à un problème en étant obligé de décrire avec exactitude chacune des étapes, écrire la "formule" algébrique qui va représenter une fonction sans pouvoir se permettre d'à peu près dans cette écriture, sont des étapes où l'on se confronte avec certains des aspects essentiels d'un problème [7]. Choisir les traitements que l'on va mettre en œuvre (ou faire mettre en œuvre à l'outil), vérifier la cohérence des réponses, interpréter les résultats sont des activités difficiles mais certainement très formatrices.

Il n'en demeure pas moins que pour choisir entre divers traitements il faut avoir une certaine connaissance de ceux-ci. Reste posée la question de savoir comment acquérir cette connaissance ou comme l'écrit Michèle Artigue : "la question complexe des rapports entre le technique et le conceptuel. Ces deux aspects de la connaissance ne peuvent être considérés comme indépendants. Quel rôle joue dans la résolution et la compréhension d'un problème le travail technique que l'on y effectue ? Quelles connaissances suppose la possibilité de piloter le technique sans passer par la phase de réalisation effective ?". Beaucoup de collègues redoutent, à juste titre, qu'en évacuant trop vite le "travail technique" on perde le sens des objets sur lesquels s'effectue ce travail. Il me semble certain que la recherche d'un équilibre n'est pas une tâche aisée, mais qu'on ne saurait remplacer cette recherche par un interdit autoritaire et vain d'utiliser les produits que notre intelligence a su créer. Au cours de sa longue histoire la mathématique a connu des découvertes qui rendaient caduques certains savoirs anciens (au moins sous leur forme ancienne), elle a toujours fini par reconnaître ces découvertes et par les utiliser, d'abord comme des nouveautés, puis comme des objets banaux, jusqu'à ce que certains de ces objets, à leur tour, tombent dans l'oubli. Il n'existe pas de différences essentielles entre l'invention (ou la découverte) d'un système de numération permettant d'effectuer "simplement" les comparaisons d'entiers et les calculs arithmétiques et celle de l'algorithme permettant de dresser une table de logarithme, pas plus qu'entre cette dernière et l'invention (ou la découverte) de l'algorithme permettant à un outil de calcul d'indiquer, formellement, la

7 Dans un questionnaire à propos de Derive un élève a très bien su décrire ceci en expliquant : "Le travail avec Derive n'est pas très différent de celui fait en classe si ce n'est que sur Derive on ne travaille que sur *le gros d'un problème*, on n'effectue aucun calcul".

primitive d'une fonction "raisonnable". Pendant des générations de futurs scientifiques ont appris à utiliser les tables en n'ayant qu'une connaissance vague de la façon dont elles étaient faites, pourquoi aurions-nous aujourd'hui des exigences différentes vis à vis des outils de calcul ?

EN GUISE DE CONCLUSION

Tous ceux qui pensent qu'**une** des raisons d'être de l'enseignement des mathématiques est de permettre aux élèves de vaincre "ces défis que la pensée se lance à elle-même" [8] avec pour corollaire la joie de la découverte, ne peuvent que se réjouir de voir que des outils, chaque jour un peu plus puissants, permettent au plus grand nombre de traiter des problèmes touchant à des branches de plus en plus étendues. Les recherches sur les outils d'aide à la démonstration (et donc sur les outils de démonstration automatique) se poursuivent, la présentation de l'information scientifique sous de nouvelles formes (hypertextes) est l'objet d'étude et d'expérimentations. Les raisons d'enseigner et d'apprendre les mathématiques demeurent ; elles restent une langue universelle :

"Quelles que soient les différences linguistiques, religieuses, économiques ou militaires, qui séparent les peuples, reste assurément que tous, forts ou faibles, ont calculé, raisonnent et démontreront de même, s'il s'agit de mesurer la diagonale du carré". (Les origines de la Géométrie, Michel Serres, page 11).

Pour que ces outils soient réellement pris en compte dans les classes, comme aide à l'enseignement mais aussi comme objet d'enseignement, il est impératif que l'institution (donc chacun de ses membres) soit consciente de la nécessité qu'il y a à former les enseignants et les futurs enseignants à la connaissance et à l'utilisation de ces outils mathématiques.

J.F. CANET

Lycée F. Mistral - Avignon

8 F. Le Lionnais note dans le *Dictionnaire des Mathématiques* (Bouvier et George P.U.F) "Or qu'ils proviennent du monde extérieur (dont le psychisme humain fait partie si son étude est conduite objectivement) ou des défis que la pensée se lance à elle-même, ce sont les problèmes qui assurent la vitalité des mathématiques et les contraignent au progrès."