Tâche, technique et théorie : une recherche sur l'instrumentation de la calculatrice à affichage graphique et la co-émergence de la pensée numérique chez des élèves de 12 à 15 ans.

Carolyn Kieran, José Guzmán

TÂCHE, TECHNIQUE ET THÉORIE: UNE RECHERCHE SUR L'INSTRUMENTATION DE LA CALCULATRICE À AFFICHAGE GRAPHIQUE ET LA CO-ÉMERGENCE DE LA PENSÉE NUMÉRIQUE CHEZ DES ÉLÈVES DE 12 À 15 ANS[1]

Carolyn Kieran
Université du Québec à Montréal
kieran.carolyn@uqam.ca

José Guzmán
CINVESTAV-IPN
jguzman@mail.cinvestav.mx

Deux calculatrices identiques sont des outils identiques pour deux élèves donnés, mais elles donnent matière à des instruments différents. (Trouche, 2003, p. 45*)*

Résumé : La triade, *tâche, technique et théorie*, élaborée par des chercheurs français (e.g., Artigue, 2002; Lagrange, 2000), a servi de cadre conceptuel pour notre recherche sur l'utilisation de la calculatrice à affichage graphique par des élèves de Secondaire 1, 2 et 3 (12 – 15 ans), avec des tâches portant sur la théorie élémentaire des nombres. Dans cette recherche, nous avons d'abord analysé l'évolution globale vue dans les stratégies générées par les élèves (Guzman, Kieran, & Squalli, 2001). Ensuite, nous avons suivi des élèves particuliers en classe afin de mieux cerner la théorie mathématique qu'ils développent en interaction avec la technologie (voir, e.g., Guzman & Kieran, 2002). Cette contribution sera consacrée à la description de la famille de tâches, des différentes techniques créées par des élèves en réponse aux tâches, et des théorisations facilitées par la technologie. Les résultats de cette recherche appuient ceux d'autres chercheurs qui démontrent l'importance de la dimension technique dans l'activité mathématique et son rôle critique comme intermédiaire entre les tâches et les théorisations; mais, comme souligné par Trouche (2003), les mêmes outils technologiques et les mêmes tâches mènent à des instruments différents.

INTRODUCTION

Les élèves du début de Secondaire et le développement de leurs concepts de structures numériques n'ont pas été le sujet de plusieurs recherches à date. Le programme d'études en mathématiques au secondaire au Québec a comme Objectif Général en Secondaire 1 (âge : 12-13 ans) d'«Accroître chez l'élève le sens du nombre et des opérations» et propose que l'élève acquiert des notions de facteurs, multiples, facteurs premiers, et divisibilité. Mais le nombre d'activités et de situations qu'on trouve dans des manuels portant sur ces concepts est très limité. Il y en a encore moins sur des utilisations possibles de la technologie pour faciliter l'acquisition de ces concepts. Le projet de recherche que nous allons décrire porte sur ces notions mathématiques et le rôle joué par la calculatrice graphique dans la co-émergence des connaissances conceptuelles et techniques.

---

[1] Une version élaborée de cet article, avec une analyse plus développée des rapports technique-conceptuels, apparaîtra prochainement (Éditions De Boeck) : « Interaction entre technique et théorie : émergence des structures numériques chez des élèves de 12 à 15 ans dans un environnement calculatrice ».

CADRE THÉORIQUE

La perspective théorique que nous avons adopté pour cette recherche est celle utilisée par un groupe de chercheurs intéressés aux rôles joués par des calculatrices symboliques dans l'émergence des techniques et de la pensée mathématique (e.g., Artigue, 2002; Defouad, 2000; Guin & Trouche, 1999; Lagrange, 2000). Le travail de Verillon et Rabardel (1995)--un travail dont la racine est vygotskienne--est central aux notions qui soutiennent les recherches d'Artigue et de ses collaborateurs et collègues. Verillon et Rabardel décrivent deux façons distinctes d'envisager des outils--comme artefact (objet physique) et comme instrument (construction psychologique). Il n'y a pas d'instrument qui existe en soi. Une machine devient un instrument lorsque le sujet a été capable de se l'approprier pour lui-même — lorsqu'il a été capable de le subordonner comme un moyen pour atteindre ses buts – et l'a intégré dans son activité. Donc, selon Verillon et Rabardel, un instrument est le résultat de la construction, par le sujet, d'une relation instrumentale avec l'artefact.

Pourtant, quand un élève s'approprie un outil, et donc transforme l'artefact en un instrument, c'est important de souligner le fait qu'il / elle apprend plus que des techniques pour répondre à une tâche donnée. Des concepts mathématiques se co-développent pendant que l'apprenant perfectionne ses techniques avec l'outil. Selon Chevallard (1999), et adapté par Lagrange (2000), l'interaction dialectique qui se produit dans ce processus inclut trois composantes : technique, tâche et théorie (voir Artigue, 2002, p. 248, pour mieux comprendre notre sens du mot *technique* – plus large que le sens usuel en éducation – et notre utilisation du mot *théorie*, qui est plus large que le sens usuel accordé par l'approche anthropologique; voir aussi la présentation de la notion de praxéologie par Michèle Artaud, c038th de ce volume). Plus spécifiquement, Lagrange nous dit que :

> Le travail de constitution de techniques en réponse à des tâches, et d'élaboration théorique sur les problèmes posés par ces techniques reste fondamental dans l'apprentissage. … Les nouveaux instruments du travail mathématique ont donc un intérêt non parce qu'ils permettraient de « sauter » du niveau des tâches à celui des théories, mais par les <u>nouvelles techniques qu'ils peuvent permettre aux élèves de développer et qui constituent un pont entre tâches et théories</u>. (pp. 16-17, notre soulignement)

Si des techniques constituent un pont entre des tâches et le développement de la théorisation mathématique, il semble clair qu'en observant les techniques générées par des élèves en réponse à des tâches et en interaction avec leurs instruments technologiques, nous obtiendrons des indices de l'évolution de leur pensée mathématique. Mais le regard sur les techniques développés par des élèves ne peut pas être séparé des tâches elles-mêmes et leurs rôles dans l'apprentissage des mathématiques. Lagrange (1999) propose des situations susceptibles d'apporter une meilleure compréhension du contenu mathématique via l'acquisition progressive des techniques dans la recherche des solutions aux tâches proposées. Guin et Trouche (1999) ajoutent que les situations utilisées doivent encourager la formulation de conjectures et la genèse d'un sens d'anticipation. Hoyles (2002) accorde une importance au « design » des situations, et précise qu'une telle orientation est au cœur du potentiel existant dans les outils technologiques pour effectuer des transformations dans le processus d'apprentissage des mathématiques.

Avec cette triade de tâche, technique et théorie comme cadre conceptuel, nous passons à ce moment à la description de notre recherche. Nous commençons avec l'environnement et la famille de tâches. Ensuite, nous décrivons les différentes techniques que les élèves ont développées en réponse aux tâches. Finalement, nous concluons avec une discussion des théorisations mathématiques qui ont co-émergé en interaction avec la technologie.

LE PROJET DE RECHERCHE

L'environnement et la famille de tâches

Le projet a été effectué dans deux pays, le Canada et le Mexique, avec des classes d'élèves du Secondaire 1, 2, et 3. Pendant la première phase (2000-2001), nous avons fixé notre attention sur des tendances globales dans l'évolution des techniques chez des élèves. Pendant la deuxième phase du projet (2001-2002), nous avons refait l'expérience avec d'autres classes d'élèves, mais cette fois-ci, nous avons fixé notre attention sur l'évolution des techniques chez des individus. Nous avons modifié notre méthodologie afin d'obtenir la trace des travaux des élèves avec leur calculatrice graphique et de faire le suivi des processus d'instrumentation. La tablette de rétro-projection (l'écran sur lequel était projeté l'écran de la calculatrice d'un élève) était indispensable à cet égard. De plus, nous avons ajouté à la deuxième phase une série d'entrevues individuelles--le travail de l'élève interviewé était projeté à l'écran pendant qu'il était en train de résoudre chaque problème.

Chaque élève avait à sa disposition une calculatrice graphique TI-83 Plus. Nous avons utilisé la calculatrice graphique pour la disponibilité de son grand écran qui affiche plusieurs lignes d'opérations mathématiques et leurs résultats à la fois, et non pas pour la représentation graphique qu'elle peut fournir. Pour l'expérience, les élèves de chacune des classes ont été divisés en trois groupes; ils avaient cependant le droit de travailler individuellement ou en équipe avec des membres de leur groupe. Pour chaque tâche, nous invitions un élève à utiliser la calculatrice qui était branchée à la tablette de rétro-projection. L'utilisation que cet élève faisait de la calculatrice, visible par toute la classe (même si la majorité était préoccupée avec la recherche de leur propre solution), était en même temps un outil pour le professeur et pour les deux chercheurs dans la compréhension de la genèse instrumentale—c.-à-d., l'appropriation de l'outil et la co-émergence simultanée des techniques et des concepts mathématiques. L'expérience, qui s'est déroulée pendant une semaine (5 périodes de 50 minutes) pour chacune des classes, s'est terminée avec un concours entre les trois groupes de la classe où un représentant de chaque groupe a été invité à résoudre devant la classe un problème, dit « dur », donné par un des deux autres groupes. Pendant la semaine qui suivait l'expérience, nous avons interviewé quatre élèves de différentes habiletés mathématiques de chaque classe. Toute l'expérience, incluant le travail projeté à la tablette de rétro-projection, a été enregistrée sur bande-vidéo.

Concernant le design du projet, les chercheurs ont d'abord choisi une situation de base qu'ils ont trouvé dans un annuaire publié par le NCTM : « les cinq pas à zéro » (Williams & Stephens, 1992) (voir Figure 1).

Prends n'importe quel nombre entier entre 1 et 999 et essaie de le ramener à zéro en cinq pas ou moins, en utilisant seulement les nombres 1 à 9 et les quatre opérations de base +, -, x ÷. Le même nombre peut être utilisé plusieurs fois, mais tu dois écrire seulement une opération par ligne.

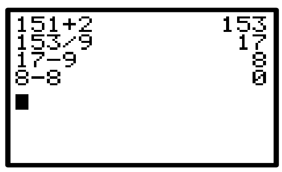

Figure 1. La situation de base, « cinq pas à zéro », avec un exemple (151) affiché à l'écran de la calculatrice graphique

La situation de base se prête au développement des techniques pour convertir des entiers, soit premiers ou composés, aux autres entiers dans le voisinage (c.-à-d., pas plus que 9 unités distant des deux côtés du nombre donné – $n \pm 9$), qui ont de plus grands diviseurs possibles, afin d'arriver à zéro en cinq pas ou moins.[2] Dix feuilles de travail ont été développées pour accompagner la situation de base (voir Figure 2).

1. Prends le nombre 144 et écris plusieurs façons différentes d'arriver à zéro, en essayant d'utiliser le moindre nombre de pas que possible.
2. Prends le nombre 151 et écris plusieurs façons différentes d'arriver à zéro, en essayant d'utiliser le moindre nombre de pas que possible.
3. Prends le nombre 732 et écris plusieurs façons différentes d'arriver à zéro, en essayant d'utiliser le moindre nombre de pas que possible.
4. Décris les stratégies que tu utilises pour réduire le nombre de pas à prendre.
5. Voici ce qu'un autre élève a proposé comme façon de ramener 432 à zéro : 432/2 = 216; 216/2 = 108; 108/2 = 54; 54/3 = 18; 18/3 = 6; 6-6 = 0. Montre une autre façon en utilisant moins de pas. Explique ta stratégie. Crois-tu que cette stratégie marchera toujours? Pourquoi?
6. Voici une stratégie proposée par un autre élève pour ramener 731 à zéro : 731+7 = 738; 738/9 = 82; 82-1 = 81; 81/9 = 9; 9-9= 0. Montre une autre façon en utilisant moins de pas. Explique ta stratégie.
7. Le nombre 266 a comme diviseurs 2, 7 et 19. Autrement dit, 266 = 2 x 7 x 19. Quelle sera la meilleure stratégie pour ramener 266 à zéro? Pourquoi? Explique pourquoi ta stratégie est la meilleure.
8. Voici ce qu'un élève a proposé pour ramener 499 à zéro : 499+1 = 500; 500/5 = 100; 100/5 = 20; 20/5 = 4; 4-4 = 0. Montre une autre façon avec moins de pas. Explique ta stratégie.
9. Quelles sont les meilleures stratégies pour ramener des nombres à zéro?
10. Pense à un entier inférieur à 1000 qui, pour tes camarades, serait difficile à ramener à zéro en cinq pas ou moins. Écris pourquoi tu penses que ce nombre est un nombre «dur». Montre la solution que tu as trouvée pour ce nombre. (Cette tâche servait de base au concours final entre les trois groupes de la classe)

Figure 2. Tâches qui figuraient dans les dix feuilles de travail

Le professeur de chaque classe a introduit la situation de base comme suit : Il (elle) a commencé avec le nombre 360, et a montré avec la tablette de rétro-projection comment il (elle) le ramènerait à zéro : 360/2, 180/2, 90/3, 30/6, 5-5. Il (elle) a ensuite invité des volontaires à venir en avant et montrer leurs façons d'arriver à zéro en moins de pas. Après quelques essais avec ce nombre, il (elle) a demandé aux élèves de la classe de suggérer leurs propres nombres de départ. Quelques exemples ont été choisi, chacun essayé par un élève

[2] On note que tous les entiers entre 1 et 1000, sauf 851 et 853, peuvent être ramenés à zéro en cinq pas ou moins. Ces deux exceptions ont besoin de six pas pour le faire—851 étant le produit de deux nombres premiers 23 et 37, et 853 étant lui-même premier. Tous les nombres dans un intervalle de 9 des deux côtés de ces deux nombres ont besoin de cinq pas pour être ramenés à zéro--donc nécessitant six pas pour ces deux.

qui travaillait en avant avec la tablette. Éventuellement, la classe a commencé les tâches sur les feuilles de travail.

L'émergence des techniques

Les techniques utilisées par les élèves au début de la semaine d'expérimentation étaient basées sur des critères très simples de divisibilité, par exemple, division par 5 si le dernier chiffre était 0 ou 5, ou division par 2 si le nombre était pair. Ceci est illustré par le travail de Marianne, une élève de Secondaire 1, avec le nombre 151 tiré de la 2^e^ feuille du travail (voir Figures 3a et 3b). Cependant, les techniques de Marianne basées sur ces critères très simples de divisibilité ont évolué, comme c'était le cas pour ses camarades. Avec la 3^e^ feuille de travail (voir Figure 4), elle a évolué vers la recherche de plus grands diviseurs. À la 4^e^ feuille de travail, en décrivant les techniques qui avaient jusqu'ici émergé, Marianne a écrit :

> Divise par <u>le plus grand diviseur possible</u> de 1 à 9; s'il n'y a pas de diviseurs, alors fais une addition ou une soustraction pour obtenir un autre nombre où la division est possible. Après avoir divisé, regarde le résultat et teste si la division est toujours possible. Sinon, répète la procédure précédente jusqu'au moment qu'on arrive à un nombre inférieur à 9 et termine la procédure avec une soustraction.

Nicolas, un élève du Secondaire 2, nous fournit un autre exemple de l'évolution des techniques de très simples à plus avancées--impliquant la recherche du plus grand diviseur possible. Après avoir testé si 931 était divisible par 9 ou par 8, il a porté son attention sur la recherche d'un nombre dans le voisinage de 931 pour lequel il serait possible d'utiliser des grands diviseurs à plusieurs reprises (voir Figure 5)[3].

L1 : 151~~/~~$^{(3)}$ – 1	150
L2: ans/5	30
L3 : ans/5	6
L4 : ans – 6	0

Figure 3a (Marianne)

L1 : $^{(6)}$151$^{(2)}$ + 4	155
L2 : ans/5	31
L3 : $^{(2)}$31 – 1	30
L4 : ans ~~*~~ / 5	6
L5 : ans – 6	0

Figure 3b (Marianne)

L1 : 732/6	122
L2 : 122/2	61
L3 : 61 + 3	64
L4 : 64/8	8
L5 : 8 – 8	0

L1 : 931 - 1	930
L2 : 930/9	103.33
L3 : 930/8	116.25
L4 : 930/5	186
L5 : 186/9	20.66
L6 : 186/8	23.25

[3] Légende des extraits de transcriptions de l'écran de calculatrice: Ln—fait référence à la ligne de l'écran de la calculatrice où est affiché le travail de l'élève. Les lignes qui sont barrées sont des lignes (ou des caractères) que l'élève a effacé de l'écran. Le petit chiffre entre parenthèses indique le temps pris par l'élève avant d'entrer un chiffre ou une opération—5 clignotements du curseur équivalent à une unité entre parenthèses.

Figure 4 (Marianne)

Figure 5 (Nicolas)

Vers la fin de la semaine, plusieurs élèves ont fait des progrès significatifs. Ils ont commencé à mieux contrôler leurs recherches de solutions. Plutôt que de procéder par tâtonnements avec les diviseurs 9, 8, 7, ..., ils ont cherché des techniques orientées autour de <u>l'utilisation du facteur 9</u>. Par exemple, Marianne a écrit sur sa 6^{e} feuille de travail qu'elle voulait « soustraire ou additionner afin d'arriver à un nombre divisible par 9; si tu divises par le plus grand nombre, même si tu dois faire une soustraction ou même une addition, tu arriveras plus rapidement à zéro. ». Mais, elle n'avait pas expliqué sur ses feuilles de travail comment elle avait trouvé le nombre exact à soustraire ou à additionner pour avoir un nombre divisible par 9. C'est uniquement lors de la dernière journée de l'expérience que nous avons eu la chance d'observer la technique qu'elle avait développée—lorsqu'elle a représenté son groupe devant la classe et utilisant la tablette de rétro-projection alors qu'un élève d'un autre groupe lui donnait le nombre 971 comme problème (voir Figures 6a et 6b). Marianne a commencé tout de suite à chercher un nombre dans le voisinage de 971 par l'utilisation du produit de deux facteurs, dont un était 9. Les élèves de la classe n'étaient pas tous capables de suivre la technique qu'elle utilisait. À partir du moment où elle a trouvé deux nombres aux deux côtés du nombre initial (voir L8 et L9 de la Figure 6b), elle a raffiné sa recherche jusqu'à ce qu'elle obtienne un produit qui était dans l'intervalle de 971 ± 9 (voir L11).

L2 : 9 × 86	774
L3: (2) 9 × 76	684
L4 : 9 × 97	873
[C'était quel nombre? Quelqu'une a répondu : 971]	
L5 : 9 × (3) 1	
L6: 9 × 99	891 (2)

Figure 6a (Marianne)

L7 : 9 × 105	945
L8 : 9 × 110	990
L9 : 9 × 107	963
L10 : (2) 9 × 106	954
L11 : 9 × 108	972
L12 : 971 + 1	972
L13 : 972/9	108
L14 : (3) 108/6	18
L15 : 18/9	2
L16 : 2 – 2	0

Figure 6b (Marianne)

Une technique utilisant des multiples de 9 a émergé chez une autre élève de Secondaire 1, Mara, pendant le concours de la dernière journée. Un membre d'un autre groupe a proposé à Mara le nombre 731. Après quelques essais infructueux centrés sur la recherche de nombres voisins pour en trouver un qui était divisible par 9 (voir Figure 7a), l'idée lui est soudainement venue de prendre la partie entière du quotient et d'en multiplier son successeur avec 9 (voir L16 et L17 de la Figure 7b). Le résultat lui a immédiatement indiqué l'ordre de grandeur de l'ajustement devant être apporté au nombre initial. Pablo, un élève de Secondaire 2, avait aussi développé une technique semblable (voir Figure 8).

L1 : 731 (1) + 1	732
L2 : 732 /9	81 .33
…	
L10 : 731 −8	723
L11 : 723 /9	80.33

Figure 7a (Mara)

L16 : 731 /9	81.22
L17 : 9 × 82	738
L18 : 731 + 7	738
L19 : 738 /9	82
L20 : 82 /2	41

Figure 7b (Mara)

L1 : 931 /9	103.44
L2 : 9 × 103	927
L3 : 931 −4	927
L4 : ans/9	103 (5)
…	
L7 : 103 /7	14.71

Figure 8 (Pablo)

Nous faisons un retour à ce moment au cas de Nicolas, l'élève de Secondaire 2 dont le travail avec les diviseurs d'essais, 9 et 8, pour le nombre 931 a été remarqué. Pendant qu'il explorait la tâche de la 3e feuille de travail, une nouvelle technique commençait à être développée à partir de son 4e essai avec 732 (voir Figure 9). Sur la 4e feuille de travail, il a décrit la technique qu'il avait utilisée pour cette tâche : « D'abord j'ai multiplié 9x9x9 et j'ai obtenu 729; puis j'ai remarqué que 732 – 3 est 729, et alors j'ai fait la même opération, mais à l'envers. »

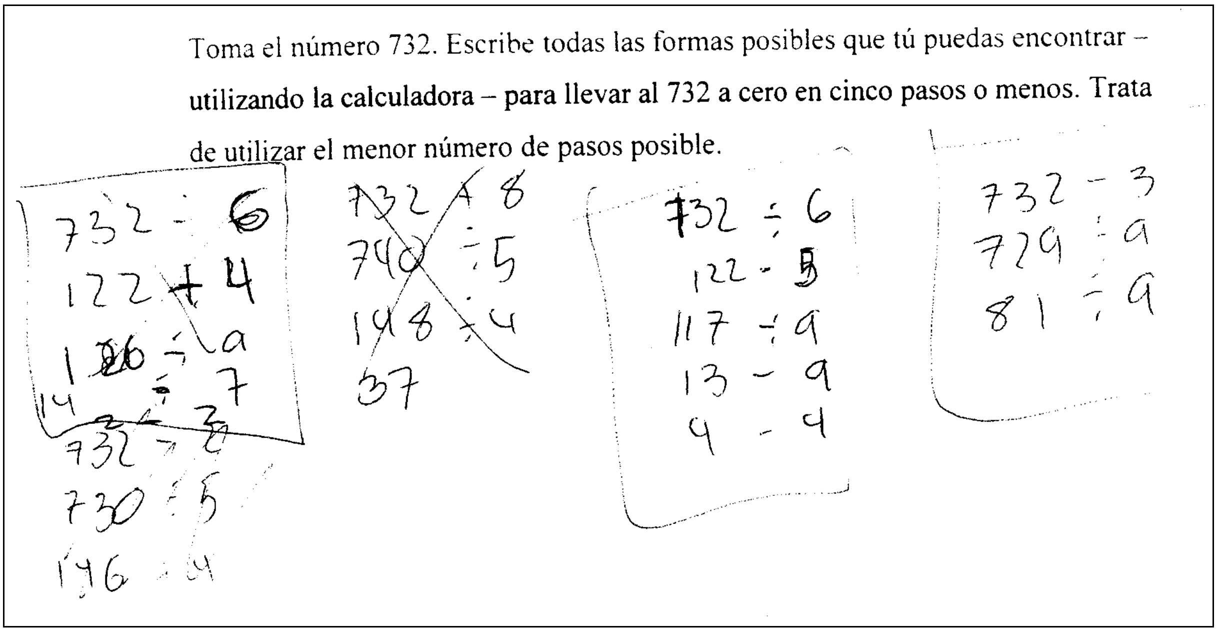

Figure 9. La 3e feuille de travail de Nicolas

C’était pendant l’entrevue individuelle avec Nicolas, la semaine suivant l’expérience, que nous avons été capable de voir jusqu’à quel point il s’était approprié cet outil comme instrument, et avait avancé dans ses réflexions mathématiques. Nous étions curieux parce qu’il n’y avait pas d’indices de l’évolution de sa technique de multiplication avec les «9» depuis sa 4^{e} feuille de travail. Pendant l’entrevue, nous avons donc posé la question, « Qu’est-ce que tu fais si le nombre donné n’est pas divisible tout de suite par un nombre entre 2 et 9? », à laquelle il a répondu qu’il ferait une addition ou une soustraction. Alors, nous lui avons demandé : « Comment savoir combien doit être ajouté ou soustrait au nombre donné? ». Il a remarqué qu’il avait une certaine « technique » (voir Figure 10 pour l’extrait du verbatim -- I = Intervieweur et N = Nicolas).

Verbatim	Commentaires
32. N: Parce que … Eh bien, j’ai aussi une technique que j’utilise. D’abord, je fais une multiplication, disons, 9x9x3, ou quelque chose comme ça pour arriver à un autre nombre, et je regarde cet autre nombre.	Il ne répond pas directement à la question; plutôt il nous donne une autre façon pour attaquer le problème, utilisant le mot « technique ».
33. I: Voyons, répète ça encore.	Nous voulions être certains de ce qu’il vient de dire.
34. N: Par exemple, si j’ai le nombre 571 et je multiplie 9x9, ça donne 81.	Ici il a choisi son propre nombre de départ.
35. I: Disons que je te donne le nombre 431.	L’intervieweur veut que Nicolas travaille sur un exemple spontané, pour éviter la possibilité que sa technique marche seulement avec ses propres exemples.
36. N: D’accord, je fais : L1: 9×9 81 L2: ans×3 243 L3: 9×9×4 324 ~~L4: 9~~ L5: 9×9×5 405 Donc, comme ça, j’arrive plus rapidement L6: 9×9×5 405	Nous remarquons que Nicolas génère trois facteurs potentiels, dont les deux premiers facteurs sont des 9s. Puis, il ajuste systématiquement le 3^{e} facteur.
37. I: Mais, j’ai dit 431. Avec cette stratégie, comment commences-tu?	Pour faire un retour au nombre donné, 431
38. N: D’abord, 9x9xquelque chose, non? Jusqu’au moment d’arriver près du nombre. Par exemple, L7: 9×8×6 432	Il contrôle maintenant les deux derniers facteurs au même temps. Le 9 est réduit à 8 tant que le 5 est augmenté à 6.
39. I: Oui, je t’ai dit 431.	Pour mener la tâche à sa conclusion
44. N: Alors, 431 plus 1, divisé par 6, divisé par 8, etcetera.	Il donne une solution qui implique d’abord une division par le dernier facteur de 9x8x6; ensuite il prend le prochain facteur à gauche et applique l’opération inverse. Quand il arrive au dernier facteur

	(9), il fait une soustraction de 9.
45. I: Montre-la	Une invitation à montrer sa solution avec la calculatrice.
46. N: L8: 431 + 1 432 L9: 432/6 72 L10: ans/8 9 L11: ans – 9 0 Et voilà!	Il entre sa solution dans la calculatrice.

Figure 10. Extrait du verbatim de l'entrevue avec Nicolas.

Nous remarquons ici que Nicolas—par contraste avec Marianne qui avait développé une technique contrôlant deux facteurs à la fois, dont un est 9—a appris à contrôler trois facteurs. Le contenu de ces trois facteurs, qui avaient leur source en 9x9x9, tel qu'indiqué sur sa 3e feuille de travail, a évolué au point d'inclure des combinaisons variées d'autres nombres.

DISCUSSION : ANALYSE DE L'ÉVOLUTION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

Les explorations mathématiques les plus intéressantes et les plus puissantes qui se sont déroulées pendant la semaine d'expérimentation étaient autour de la recherche des multiples de 9. Puisque les élèves ont voulu arriver à zéro avec le plus petit nombre de pas possible, leurs techniques initiales ont par la suite évolué. Ils ont donc cherché à savoir si le nombre donné était divisible par 9, ou s'il y en avait un dans le voisinage (i.e., dans l'intervalle de $n \pm 9$, où n est le nombre donné). Mais « comment trouver les bons nombres dans le voisinage » était la question. La majorité des élèves ne connaissait pas le critère de divisibilité par 9 (i.e., pour être divisible par 9, la somme des chiffres doit être un multiple de 9); alors ils ne pouvaient pas avoir recours à cette technique. En fait, le peu d'élèves qui connaissaient et utilisaient le critère de divisibilité par 9 avaient tendance à l'appliquer de façon mécanique et, conséquemment, ont été dépourvus du potentiel riche de l'expérience qui se présentait aux autres.

Les connaissances mathématiques qui ont émergées chez plusieurs élèves englobaient des variantes de l'algorithme de division. Selon cet algorithme, n'importe quel entier peut être exprimé comme le produit de deux entiers plus le reste, c'est-à-dire « pour b>0 et a, il existe des entiers uniques c et d avec $0 \leq d < b$ tel que $a = b \times c + d$ » (e.g., 989 = 9 x 109 + 8). Les élèves n'ont pas reçu d'enseignement par rapport à cet algorithme; mais leurs techniques de recherche pour l'entier c ont révélé les différentes façons embryonnaires de concevoir cette structure mathématique. Leurs efforts pour trouver des multiples de 9 dans le voisinage des nombres donnés ont aussi fait ressortir d'autres découvertes reliées. Par exemple, « À l'intérieur de chaque intervalle de 9 nombres, il y a exactement un nombre qui est multiple de 9 ». D'autres élèves, qui ont produit des essais de solutions incluant, par exemple, « 738 / 9 = 82 suivi par 729 / 9 = 81 », ont découvert que, lorsque deux multiples adjacents de 9 (e.g., 738 et 729) sont divisés par 9, les deux quotients obtenus (i.e., 82 et 81) sont consécutifs.

Les exemples de techniques, développées par les élèves déjà présentées mettent en lumière ce qu'on peut appeler des variantes de l'algorithme de division. Par exemple, une des techniques a évolué pour prendre la forme de «faire une division d'essai par 9», suivi par «la multiplication du quotient tronqué par 9», afin de voir la distance du produit du nombre initial—une approche que nous avons nommé « l'algorithme de division impliquant division d’essai» (e.g., 989/9 = 109.8888889, 9x109=981, alors 989-8=981, 981/9=109, …). Une variante moins sophistiquée de cette technique que nous avons observée est de porter un regard à la partie décimale du quotient pour obtenir des indices quant à la distance du nombre donné à un multiple de 9.

Une autre variante de l’algorithme de division, une variante où la division n’est pas explicite, a été basée sur ce que nous avons appelé « l’algorithme de division impliquant multiplication d’essai». Cette approche comprenait parfois plusieurs multiplications d’essais afin de trouver l’entier c qui suffirait. Par exemple, dans la relation $989 = 9 \times c + d$ -- une relation implicite pour les élèves – ils ont fait : 9x106=954, 9x108=972, 9x109=981 — le dernier essai étant dans le bon intervalle 989±9).

Tandis que les recherches des multiples de 9 décrites auparavant impliquaient deux facteurs, les techniques développées par Nicolas en impliquaient trois. Il voulait exprimer le nombre donné, ou un de ses proches voisins, comme le produit des facteurs acceptables selon les règles du jeu (i.e., de 2 à 9). Nous avons appelé la technique qu’il nous a montré pendant l’entrevue individuelle la « multiplication d’essai impliquant trois facteurs ».

Trouche (2003) dit que, « deux calculatrices identiques sont des outils identiques pour deux élèves donnés, mais elles donnent matière à des instruments différents » (p. 45). Les résultats de notre recherche se font l’écho de cet énoncé. Dans leurs intégrations de la calculatrice dans l’activité mathématique, les élèves de cette étude ont créé des instruments très personnels, et très différents. La variété des techniques développées, et des théorisations mathématiques co-émergeant avec ces techniques, en témoigne.

CONCLUSIONS

Dans la présentation des résultats de cette recherche, il était presque impossible de parler des techniques sans parler en même temps des tâches et des théorisations mathématiques se développant en interaction avec ces techniques. Les techniques, qui ont émergé chez les élèves, étaient en réponse aux tâches proposées—tâches qui ont été créées avec l’idée de prendre avantage des capacités numériques de l’outil technologique. Cependant, et de façon plus importante, ces techniques, qui ont clairement évolué pendant l’expérience, ont mené à la croissance des connaissances mathématiques des élèves; c’est-à-dire qu’en développant des nouvelles techniques soutenues par la technologie, les élèves -- pour mieux répondre aux tâches présentées -- ont généré de nouvelles façons de penser et de faire des mathématiques à l’intérieur des tâches proposées. En d’autres mots, comme souligné par Lagrange (2000), les outils technologiques ont permis aux élèves de développer de nouvelles techniques qui constituaient le pont entre les tâches et leurs théorisations.

Fréquemment, la seule utilisation, faite par les élèves des calculatrices en Secondaire 1 et 2, est en tant qu’outil de vérification de réponses numériques aux problèmes et aux exercices. L’analyse des données de ce projet nous a montré que cet outil a aussi un rôle puissant à jouer dans la construction des connaissances mathématiques. Nos résultats suggèrent qu’avec des environnements numériques semblables à celui utilisé dans cette étude et avec une utilisation soutenue de l’outil pendant une certaine période de temps, les élèves pourront, en interaction avec la technologie, développer leurs théories mathématiques. Cependant, il ne faut pas négliger la composante technique. Dans cette recherche, la dimension technique de l’activité mathématique était prépondérante et, on peut dire, irremplaçable comme intermédiaire entre tâches et théorisations.

REMERCIEMENTS

Nous désirons souligner le support de recherche fourni par le Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (subvention # 410-99-1515) et le CONACYT du Mexique (subvention # I32810-S). Nous sommes très reconnaissants de la participation des élèves et des enseignants, sans qui cette recherche n'aurait pas été possible.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 245-274.

Defouad, B. (2000). *Étude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S* (thèse de doctorat). Université Paris 7.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19,* 221-266.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3,* 195-227.

Guzman, J., & Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolas and factors and divisors. In *Proceedings of 26th PME Conference* (Vol. 3, pp. 41-48). Norwich, UK.

Guzman, J., Kieran, C., & Squalli, H. (2001). The multi-line screen calculator and the emergence of numerical strategies in secondary 1, 2, & 3 students. *Proceedings of 25th PME Conf*erence (V. 1). Utrecht, NL.

Hoyles, C. (2002). From describing to designing mathematical activity. In C. Kieran, E.A. Forman, & A. Sfard (Eds.), *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 273-286). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 4,* 51-81.

Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics 43,* 1-30.

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Document pour l'habilitation à diriger des rech. Univ. Paris VII.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, X*, 77-101.

Williams, D., & Stephens, M. (1992). Activity 1: Five steps to zero. In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in mathematics education* (pp. 233-234). Reston, VA: NCTM.