Le rôle de la calculatrice dans le développement du langage autour du jeu global / local

Michela Maschietto

c040th1

Titre: Le rôle de la calculatrice dans le développement du langage autour du jeu global / local.

Auteur: Michela Maschietto
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Modena e Reggio Emilia – via G.Campi 213/B - Modena (Italie)
maschietto.michela@unimore.it Tel. +39 059 2055176

Résumé

L'article se réfère à une recherche récente menée en didactique de l'analyse visant à étudier l'introduction à ce champ des mathématiques dans l'environnement de calculatrices graphiques et formelles. Cela est réalisé par la mise en jeu de l'articulation entre point de vue global et point de vue local sur les objets fonctionnels (ce qui est appelé « jeu global /local ») via une ingénierie didactique (à visée diagnostique) au niveau de la première S (élèves de 17-18 ans) en Italie. Les analyses des trois expérimentations effectuées ont mis en évidence diverses facettes de cette articulation. L'article est centré sur une de ces facettes, à savoir le développement du langage autour du jeu global / local et le rôle de la calculatrice dans ce développement.

Introduction

Les nouvelles technologies sont de plus en plus présentes au cœur des questions concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. L'intérêt vers les nouvelles technologies se manifeste aussi au niveau institutionnel par le financement des projets (par exemple, en Italie le projet SeT[1]), par la constitution de commissions de réflexion et de proposition de programmes de mathématiques[2], par les cours de formation des enseignants. En particulier elles sont présentes dans les questions sur l'apprentissage e l'enseignement de l'analyse, champ des mathématiques concerné par le travail auquel on se réfère ici.

Les recherches en didactique des mathématiques conduites jusqu'à présent ont mis en évidence les difficultés des élèves (mais aussi des étudiants) dans l'apprentissage des concepts de l'Analyse. Dans un article de synthèse, M. Artigue (1996) distingue trois catégories principales de difficultés, celles liées respectivement à la complexité des objets de base de l'Analyse (les nombres réels et les fonctions) et au fait que ces objets sont en construction lorsque débute l'enseignement de ce champ, celles liées à la conceptualisation de la notion clef de ce champ - la notion de limite - et à sa formalisation, enfin celles liées aux ruptures nécessaires par rapport aux modes de pensée et de travail familier aux élèves dans le domaine algébrique et aux spécificités du champ de l'analyse. De nombreuses recherches (par exemple, Tall, 1989 ; Artigue et al., 1998 ; Trouche, 1996) en didactique de l'analyse se sont intéressées à la façon dont les nouvelles technologies peuvent soutenir l'enseignement de l'analyse notamment dans le secondaire où cet enseignement débute. Elles s'intéressent également à l'étude des fonctionnements cognitifs des élèves vis-à-vis d'un environnement informatique.

A la différence des recherches en didactique de l'analyse qui se sont plutôt centrées sur le concept de limite et sa formalisation ou sur les objets fondamentaux de ce champ des mathématiques, la recherche (Maschietto, 2002) à laquelle cet article se réfère s'intéresse, elle, spécifiquement à l'étude des changements que l'entrée dans l'Analyse demande et aux reconstructions cognitives que ces changements impliquent. Ceux-ci sont étudiés dans l'environnement défini par les calculatrices graphiques et formelles par le moyen d'une ingénierie didactique à visée diagnostique. En particulier, la recherche se centre sur un des changements liés à la transition à l'analyse (transition d'autres champs de mathématiques, notamment celui de l'algèbre) : l'articulation entre point de vue global et point de vue local sur les objets fonctionnels (ce que nous avons appelé « jeu global / local »). Dans cet article, nous analyserons le langage qui

[1] SeT : Science et Technologie (http://www.bdp.it/set/)

[2] En Italie, une commission de la Société Mathématique d'Italie (UMI) a élaboré les lignes guides pour les programmes de mathématiques pour l'enseignement secondaire dans lesquelles les technologies, et au sens large les instruments, ont une place importante.

se développe autour de cette articulation ainsi que le rôle que le travail avec la calculatrice a dans son développement pendant les séances. Le langage représente en effet une des composantes du processus de conceptualisation. Dans cet article, nous n'approfondirons pas l'analyse des autres composantes, qui sont cependant prises en compte dans la recherche citée.

Nous préciserons dans une première partie des éléments théoriques qui ont fondé la recherche, dans une deuxième partie l'ingénierie didactique et les analyses des protocoles. Les conclusions constitueront la troisième et dernière partie.

I. Cadre de la recherche

Nous présentons dans ce qui suit le jeu global / local ainsi que des éléments théoriques utiles pour l'analyse du fonctionnement cognitif dans la gestion de ce jeu.

Le jeu global / local

La prise en compte des recherches concernant l'étude de l'introduction à l'Analyse nous a amené à prendre en compte une dimension particulière : la mise en place du jeu global / local.

Les tableaux de valeurs, les calculs numériques mettent en jeu le caractère ponctuel[3] ; le repérage de formes, tant dans le registre algébrique que graphique, le repérage de fonctions prototypes, de familles, le passage des fonctions prototypes à des fonctions quelconques de la même famille, mettent en jeu le caractère global. Les propriétés de croissance, décroissance sur un intervalle, de périodicité, travaillées dans la première rencontre sont aussi des propriétés globales. L'entrée dans le champ de l'analyse requiert un enrichissement de ces deux points de vue par une localisation du regard. On localise le regard au voisinage d'un point, à distance finie ou infinie, et de nouvelles propriétés apparaissent puis deviennent centrales. On prend ensuite conscience du fait que ce regard local sur l'objet peut à son tour nous donner accès à des propriétés globales de l'objet, voire permettre de le reconstituer dans sa totalité ; l'articulation s'inscrit alors dans une dialectique entre points de vue local et global.

L'évolution nécessaire du rapport à la linéarité illustre de façon paradigmatique ce jeu et son caractère dialectique. Pour l'élève qui entre dans le champ de l'analyse, la linéarité est un phénomène familier et global, attaché à la proportionnalité. En analyse, la linéarité devient un phénomène local qui fonde la notion de dérivabilité. Le jeu local / global concerne les divers registres sémiotiques (Duval, 1995) et s'exprime aussi dans différents cadres. Dans le cadre géométrique par exemple, il impose une reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe qui d'objet global représenté à l'aide du paradigme de la tangente au cercle et pensé en termes de position par rapport au cercle et d'intersection doit devenir un objet local intégrant l'idée d'approximation (Castela, 1995).

Quelques éléments théoriques

Au delà des références didactiques, nous avons considéré des recherches en sciences cognitives qui, de manière plus générale, étudient le rôle joué par les métaphores, la perception et le mouvement dans la conceptualisation humaine, en particulier en mathématiques. Nous nous sommes ainsi appuyée sur des recherches (d'une part celle de G. Longo (1998, 2000)[4] et d'autre part de G. Lakoff et L. Núñez (Lakoff et Núñez, 2000 ; Núñez, 2000)) qui ont paru susceptibles de fournir des outils complémentaires pour penser la transition à l'analyse et les moyens didactiques de sa gestion.

[3] Le point de vue ponctuel est celui où l'on considère l'objet fonctionnel à travers les valeurs prises par la fonction en un ou plusieurs points précis. Cfr. Jahn, A.P. (1998). *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre – Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.
[4] Groupe de recherche « Géométrie et Cognition » avec J. Petitot et B. Teissier au sein de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

Le travail mené par G. Longo a pour but d'une part d'articuler l'étude des fondements des mathématiques et l'étude des fonctions cognitives, d'autre part d'élaborer des modèles mathématiques de ces fonctions. Il met l'accent sur deux aspects : le premier concerne la constitution d'invariants à la suite d'interactions avec le monde réel (perceptions, relations spatiales, mouvement), invariants qui interviennent dans le processus de construction de significations pour de nouveaux concepts mathématiques ; le deuxième aspect concerne les influences constantes et réciproques entre le niveau perceptif et le niveau mathématique (où les concepts sont formalisés) dans l'activité mathématique. La recherche de G. Lakoff et R. Núñez s'intéresse, elle, à l'étude de l'origine des idées mathématiques, à savoir comment elles sont conceptualisées. Deux éléments fondamentaux de cette recherche sont la notion d'« embodiment »[5] et celle de métaphore conceptuelle[6].

Le travail de G. Lakoff et R. Nunez a inspiré des recherches en didactiques des mathématiques. En effet, la recherche de P. Boero, L. Bazzini et R. Garuti (2001) sur l'approche fonctionnelle des inégalités et celle de F. Arzarello et O. Robutti (2001) sur l'interprétation de représentations graphiques s'appuient sur les éléments mis en évidence par les analyses de G. Lakoff et R. Nunez sur la conceptualisation en mathématiques en termes de métaphores.

La recherche de P. Boero, L. Bazzini et R. Garuti attire l'attention sur des questions de construction de métaphores et sur l'influence des activités en classe sur l'élaboration et l'utilisation de ces métaphores. L'analyse de l'expérimentation menée au collège montre que les choix didactiques ne sont pas neutres pour la construction de métaphores. Les discussions en classe et les sollicitations visant à faire représenter les fonctions dans des registres divers semblent donner aux élèves l'opportunité d'exprimer leur pensée et, donc, de construire de métaphores. Celles-ci semblent se fonder sur des expériences quotidiennes, comme celle de l'intersection de deux chemins qui se croisent ou celle de l'équilibre d'une balance[7], mais aussi sur les relations avec une certaine « culture » (dans ce cas, liée à l'activité de la classe, à la gestion de l'enseignant et à son discours). À l'appui de ce dernier point, les auteurs font remarquer que tout élève pourrait utiliser ces métaphores, mais que " this potential does not translate into an effective, appropriate use if this use is not legitimate and supported by appropriate signs (particularly words and gestures) ". Par exemple, la métaphore de la balance qui apparaît chez un élève avait été proposée en classe avant son utilisation dans la résolution du problème analysé, par l'élève la proposant. À ce moment-là, l'enseignant en avait fait l'objet d'une discussion collective.

La recherche de F. Arzarello et O. Robutti s'intéresse elle à l'étude de l'utilisation du langage algébrique dans l'exploration et l'interprétation des représentations graphiques obtenues par un capteur de mouvement à la suite d'une expérience de course. Une des hypothèses de cette recherche est effectivement liée à la prise en compte des travaux sur l'« embodied cognition », c'est-à-dire au principe que " body, language, and instruments mediate and support the transition of students from the perceptual facts to the symbolic representations, e.g. the algebraic one ". L'analyse de l'activité proposant une situation dynamique (la course) semble favoriser l'émergence d'une métaphore et permettre à cette métaphore de soutenir un certain travail d'interprétation. Cette métaphore, avec d'autres éléments de l'expérience, est aussi présente dans le début du passage à la mathématisation du mouvement effectué. Dans l'activité proposée, les calculatrices graphiques et le capteur de mouvement ne sont pas neutres vis à vis de l'interprétation des représentations graphiques et surtout de l'apparition de métaphores. En outre, la calculatrice n'est pas seulement le moyen d'accéder à la mesure d'un certain phénomène (capturé avec le capteur), elle est une composante fondamentale du milieu dans lequel les élèves peuvent exprimer et construire leurs interprétations.

[5] L'objectif est « to bring embodied human minds, as they have come to be understood recently in cognitive science, back into mathematics, and to construct a precise mind-based mathematics ».

[6] Les métaphores conceptuelles sont décrits comme des « 'mappings' that preserve the inferential structure of a source domain as it is projected onto a target domain. Thus the target domain is understood, often unconsciously, in terms of the relations that holds in the source domain »

[7] Nous pouvons aussi penser à nous mêmes comme à une balance, où les bras sont les plats et les poids sont tenus dans nos mains.

Comme la recherche de P. Boero et alii paraît aussi le montrer, la « pensée métaphorique » se manifestant et par le langage et par les gestes semble avoir besoin d'espace pour se construire, mais aussi d'activités qui la stimulent et qui légitiment son usage. La définition de l'activité et de la marge de travail autonome des élèves devient alors très importante. La recherche de F. Arzarello et O. Robutti porte aussi indirectement sur le partage possible de la responsabilité de la construction et l'utilisation des métaphores dans l'activité mathématique entre élèves et enseignant. Les éléments issus des recherches citées ont influencé la construction de l'ingénierie didactique conçue pour l'étude du jeu global / local, comme nous allons le préciser dans la suite.

II. Les hypothèses

En ce qui concerne le jeu global / local, nous faisons l'hypothèse que cette dimension joue un rôle essentiel dans l'entrée dans la pensée en analyse et qu'un premier niveau de conceptualisation devrait pouvoir se développer dès le début dans l'enseignement secondaire de l'analyse. Notre recherche se propose d'étudier la possibilité de faire vivre ce jeu à partir de classe de niveau Première S, où l'enseignement de l'Analyse débute institutionnellement, en s'appuyant sur le changement du rapport à la linéarité mis en jeu dans la notion de dérivée, qui est centrale à ce niveau d'enseignement. Pour ce jeu nous avons choisi une entrée graphique.

Pour la construction de notre ingénierie, une des hypothèses est que les calculatrices graphiques et formelles, par les commandes de zoom (ZoomIn, ZommOut et ZoomBox) qu'elles fournissent, peuvent soutenir la localisation nécessaire du regard. Le choix du jeu d'agrandissement / réduction des représentations graphiques était déjà amorcé dans certaines recherches développées dans l'environnement papier/crayon, par exemple dans le projet AHA (1999), et dans celui de calculatrices graphiques et symboliques, par exemple dans le projet de l'équipe DIDIREM (Artigue et al., 1998). L'analyse de ces recherches (détaillée dans Maschietto, 2002) met en évidence qu'il s'agit là d'une localisation 'partielle' du regard.

La prise en compte d'études cognitives cités nous conduit à faire une autre hypothèse : le recours aux calculatrices peut aider à mettre en relation d'une part les caractéristiques de cette localisation perceptives et dynamiques, d'autre part mathématiques. En accord avec ces études, le temps laissé aux explorations des élèves pourrait jouer un rôle essentiel dans la construction de cette liaison.

III. La recherche expérimentale

L'ingénierie didactique et son expérimentation

Nous avons construit une ingénierie didactique (Brousseau, 1998) à caractère diagnostique pour mettre en place le jeu global / local et l'observer en classe. L'ambition didactique était construire effectivement une ingénierie didactique viable dans l'enseignement secondaire. Trois expérimentations ont été effectuées dans des classes italiennes[8] (correspondant au niveau de la Première S) en mai 2000 (exp.A) et mai 2001 (exp.B et exp.C). Chaque séance proposée était constituée de deux phases : une phase de travail en groupe (deux / trois élèves par groupes) et une phase de travail collectif de mise en commun gérée par l'enseignant. Nous avons effectué pour chaque séance une analyse *a priori* qui a servi de base au travail de mise au point et de négociation de l'ingénierie avec les enseignants impliqués dans l'expérimentation. Les expérimentations ont fait l'objet d'une évaluation finale au moyen d'un devoir surveillé et d'un questionnaire donné à remplir à la maison. Pour chaque séance, nous avons filmé un groupe d'élèves pendant leur travail et ensuite la phase collective. D'autres groupes d'élèves ont été observés par des étudiants préparant

[8] Il s'agit de classes suivant le programme de mathématiques du Plan National Informatique (PNI).

leur mémoire de maîtrise en didactique des mathématiques, le nombre d'observateur variant selon la classe.

Les calculatrices nécessaires aux activités ont été fournies aux élèves de deux classes (TI-89 pour l'exp_A et l'exp_B), tandis qu'une classe (exp_C) travaillait avec des calculatrices TI-92 depuis 2 ans, parce qu'elle participait à un projet national sur l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques. Puisque les calculatrices jouent un rôle fondamental dans notre recherche, dans la conception de l'ingénierie nous avons tenu compte du niveau d'instrumentation des élèves. Nous avions alors prévu une séance pour la prise en main de la calculatrice, avec des activités centrées sur les commandes nécessaires ou particulièrement utiles au travail proposé. Cette phase initiale a été préparée sur la base de l'analyse *a priori* de l'ingénierie et prévoyait aussi la distribution de polycopiés résumant les commandes de la calculatrice. Les élèves (sauf ceux de l'exp_C) disposaient de la calculatrice à la maison pour toute la durée de l'expérimentation.

Les séances de l'ingénierie

Nous présentons dans ce qui suit les éléments caractéristiques des trois premières séances effectuées dans toutes les trois expérimentations (le nombre de séances constituant l'ingénierie a été réduit dans les expérimentations 2001 à cause de contraintes institutionnelles, le mois de mai étant très chargé pour élèves et enseignants).

La première séance a pour objectif de provoquer et d'étudier la production par les élèves du phénomène de linéarisation locale d'une fonction au voisinage d'un point où elle est dérivable, au niveau perceptif, en utilisant la dynamique des agrandissements / réduction possible par les commandes de zoom de la calculatrice. Dans l'analyse *a priori*, ce phénomène a été désigne par l'expression de « micro-linéarité ». La deuxième séance a pour objectif d'aboutir à une première mathématisation du phénomène. Il s'agit à la fois de s'appuyer sur l'invariant perceptif et de le questionner d'un point de vue mathématique pour faire de la notion de micro-linéarité une notion non seulement perceptive mais aussi opérationnelle. Dans cette séance, les rapports à l'objet tangente commencent à être reconstruits. La troisième séance permet de revenir sur la démarche qui a amené à la nouvelle détermination de la droite tangente à la courbe représentative d'une fonction et de travailler sur le début du nouveau calcul qui va se mettre en place.

L'analyse des protocoles des expérimentations

Les analyses des trois expérimentations (protocoles des résolutions des groupes, observations et discussions collectives, tests et questionnaires d'évaluation) ont fourni de nombreux éléments concernant la mise en place du jeu global / local et sa gestion didactique et cognitive. Par rapport à ces éléments, cet article est centré sur les aspects langagiers émergeant des activités autour de ce jeu.

Le langage des explorations – Première séance

L'activité proposée dans la première fiche de travail (laquelle n'est pas effectivement proposable en papier / crayon), correspond à l'exploration graphique de courbes représentatives de fonctions dérivables et non dérivables aux points choisis dans la fiche par l'utilisation des commandes de zoom. En accord avec les hypothèses, nous avons laissé aux élèves un intervalle de temps important (environ une heure) pour le travail en groupe, ce qui leur a permis de rencontrer des cas divers.

Les explorations sont accompagnées par un échange de premières interprétations des représentations graphiques tracées à l'écran de la calculatrice à l'intérieur des groupes. Dans les extraits-ci, les élèves se réfèrent aux représentations graphiques de la fonction y4(x)= $\begin{cases} 4 + x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$

dans la fenêtre standard ([-10 ;10]x[-10 ;10]) (*figure* 1) et dans des fenêtres obtenues par zoom (*figure* 2).

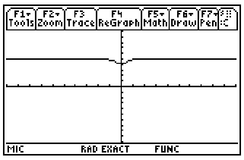

figure 1

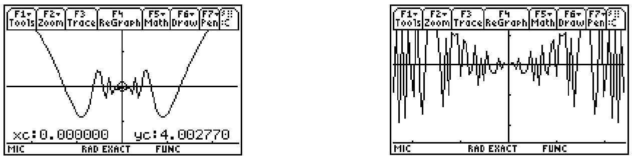

figure 2

Extrait 1. exp_A – Travail en groupe. Groupe A_3 – Elèves CA, CF et GL

43. CF : « Ah, il y a un fossé ! » [rif *figure* 1]

44. CA : « Agrandis-le », *il s'adresse à GL, qui effectue un ZoomIn*

Extrait 2. exp_B – Travail en groupe. Elèves CA et RM

114 RM : « C'est tellement moche ce truc !... », *il fait d'autre zooms* [rif *figure* 2]

116 RM : « Je dois dessiner 'ces dents de Dracula' »

Extrait 3. exp_B – Discussion collective.

C42 AR : « On obtient une électrocardiogramme » [rif *figure* 2]

L'enseignant trace un agrandissement au tableau à partir de la représentations standard

C44 A : « Beh, pas vraiment comme ça, je ne l'avais pas autant serrée », *l'enseignant continue à tracer*

Les extraits des protocoles mettent en évidence le recours à des expressions imagées pour essayer d'appréhender les nouvelles courbes. Les expressions utilisées par les élèves appartiennent à leur propre répertoire construit en dehors des mathématiques. Elles se placent à un niveau perceptif : elles sont étroitement liées à ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice (Extrait 1 : n° 43 et Extrait 2) et sollicitée par l'utilisation des commandes utilisées (Extrait 1 : n° 44). La mise en commun des résultats des explorations dans la phase collective permet à ces cas frappants de passer de l'espace des élèves à celui de la classe et de devenir des éléments auxquels les élèves peuvent se référer aussi dans la suite des séances. Le « électrocardiogramme » (Extrait 3) est paru aussi dans la discussion collective de l'exp_A. Les expressions employées par les élèves ont une signification liée à l'activité dans laquelle elles sont formulées.

Les explorations des représentations graphiques ont comme but celui de faire rencontrer aux élèves un phénomène nouveau, pour lequel ils formulent des expressions mettant ensemble objets, comme droite et courbe, qui aurait difficilement place ailleurs.

Extrait 4. exp_A – Travail en groupe. Groupe A_6 – élèves DAL, DF et MA.

17. DF : « Il devient de plus en plus une droite »,

Extrait 5. exp_B – Travail en groupe. Groupe A_3 – élèves CA, RM.

36. RM : « Elle [*la courbe*] est devenue une droite »

Les extraits montrent comment le vocabulaire utilisé pour décrire le phénomène de linéarisation locale est à la fois dynamique (Extrait 4), lié à la suite des zooms et statiques (Extrait 5), visant plutôt à mettre en évidence le résultat de l'exploration (c'est-à-dire le repérage de l'invariant linéaire).

Au cours de la discussion collective, les résultats des explorations sont partagés : il s'agit de faire émerger l'invariant linéaire et son caractère local. Comme le montre l'extrait ci-dessus (Extrait 3), la discussion permet aux élèves de communiquer leur interprétation, ce qui ne correspond pas à une pratique usuelle dans la classe. Une étape importante de la discussion est la détermination d'une expression langagière pour designer le phénomène repéré.

1. Recherche d'une expression langagière pour le phénomène repéré – première séance

Par rapport aux termes apparus pendant l'activité d'exploration et sa mise en commun, la recherche d'une terme pour designer le phénomène est un processus fortement sollicité par l'enseignant, comme le témoigne l'extrait ci-dessus (Extrait 6).

Extrait 6. Exp_A – Discussion collective de la première séance

C250. INS : « (...) Quelque chose de plus condensé. Par exemple, si je dis Tartempion, je sais que cela indique toute cette chose-ci [*il se réfère à la phase écrite au tableau : 'en effectuant des zooms successifs autour d'un point, une courbe devient presque une droite'*] et tout le processus que nous avons fait [] ».

Les élèves discutent en peu entre eux.

C251. DF : « Est-ce que l'on peut dire limite d'une courbe ? »

C252. C : « Limite d'une courbe ... mah »

C253. DF : « Puisque nous devons traiter les limites »

C254. C : « Ah, il dit 'si nous devons traiter les limites' tu dis, nous n'allons pas hypothéquer le mot limite. (...) Puis-je vous faire une proposition ? Une droite ... Comment elle est aussi appelée ? »

C257. Tous : « Linéaire »

C258. C : « (...). Dites-moi quelque chose pour substituer 'zooms successifs autour d'un point'. Une proposition, un mot. [...] »

C259. CF : « Lineare zoomata »[9]

La création d'une expression langagière spécifique n'est pas facile à obtenir, puisqu'elle ne correspond pas à une pratique usuelle dans la classe. On le voit dans la proposition de DF (n° C251) qui se réfère à la connaissance du programme de mathématiques (n° C253). En revanche, les élèves sont conduits à choisir une expression langagière qui est pour l'instant mathématiquement plus neutre mais riche de sens en relation aux expériences faites. Dans le but d'obtenir ceci, l'enseignant suscite l'adjectif « linéaire ». La suite vient des élèves : après un échange entre eux sur la place des deux mots, l'expression finalement choisie est « zoomata lineare »[10]. L'enseignant invite les élèves à écrire la définition, présente au tableau, sur le cahier. Les termes choisis mettent fortement l'accent sur l'idée du processus qui a amené à la linéarité et sur l'instrument utilisé plus que sur l'idée de propriété locale. L'expression langagière ainsi trouvée est écrite dans le texte de la fiche de la deuxième séance de l'ingénierie.[11]

Dans la discussion de l'exp_C, le moment création d'une expression a été très riche. L'expression langagière proposée par les élèves, « segmentizzazione » ou « segmentizzata » où l'on reconnaît la racine du mot « segment » qui garde ainsi de l'interprétation de la représentation à l'écran de la calculatrice. En effet, l'expression langagière initialement proposé par les élèves, à la différence de celui de l'exp_A, rend compte de l'interprétation du résultat d'agrandissement plutôt que du processus (le zoom). Si les expressions proposés traduisent bien le passage au linéaire à travers sa caractérisation graphique, en revanche ils ne contiennent aucune expression permettant de souligner le caractère local du processus, ce qui amené l'enseignant à suggéré le terme « micro ». Dans le discours, cependant, l'enseignant utilise à la fois l'expression suggérée par les élèves et celui de notre analyse *a priori*, micro-linéaire, qui est finalement l'expression qui sera retenue pour la fiche de la séance II. L'attention au point du vue local est très forte chez l'enseignant, qui donne une représentation des écrans parus lors des agrandissements en termes de rectangles contenant le point choisi.

---

[9] Expression gardée en italien

[10] On peut essayer de traduire l'expression : « zoomatiquement linéaire »

[11] Un point que ne doit pas être négligé dans l'analyse est la langue dans laquelle les commandes de la calculatrices sont exprimés. Pour toutes les trois expérimentations, les calculatrices avait par défaut la langue anglaise, ce qui a influencé le langage développé et centré sur le processus, par exemple pour « zoomata lineare ». En effet, les commandes « ZoomIn » et « ZoomOut » sont traduit respectivement en «Ingrandisci » (agrandir) et « Riduci » (réduire).

Les analyses des expérimentations montrent d’une part que la démarche d’attribution d’une expression langagière est délicate et ne va pas de soi dans la classe, d’autre part que l’enseignant joue un rôle fondamental dans cette démarche. En effet, la création de cette expression implique deux éléments qui ne sont pas présents dans l’enseignement secondaire. Le premier élément concerne l’attribution d’un terme à un objet mathématique de la part des élèves et sa reconnaissance dans le langage de la classe. Le deuxième élément concerne l’expression même, dans laquelle on garde trace du travail effectué avec l’instrument utilisé par les élèves.

2. *Le réinvestissement d’une création langagière - Deuxième séance*

L’expression crée à la fin de la deuxième séance sert à démarrer le processus de mathématisation du phénomène. Son réinvestissement se vérifie dès le début du travail en groupe : la deuxième fiche de travail donnée aux élèves demande en effet de vérifier la propriété de micro-linearité pour une fonction étant donné un point de son graphe. En général, les élèves ne rencontrent pas de difficultés à vérifier ce que l’on leur demande (Extrait 7).

Extrait 7. Exp_A - Groupe A_3 – élèves CA, CF

Les élèves effectuent deux `ZoomIn` autour du point choisi pour vérifier si la fonction est « zoomata lineare », comme la fiche le demande. C’est CF qui gère la calculatrice.

1. CF : « Oui, elle est zoomata lineare » [*pause*]
2. CF : « Ecris ci-dessous[12] qu’il s’agit d’une zoomata lineare, parce que l’on a effectué deux agrandissements successifs autour d’un point choisi et l’on a obtenu un droite ! », *il s’adresse à CA, qui écrit ce que CF vient de dire.*

La construction de signification mathématique mentionnée auparavant continue par le travail de la fiche qui porte à chercher une expression algébrique pour la droite apparaissant à l’écran de la calculatrice après les zooms. Cette partie ne sera pas considérée dans cet article.

3. *Le réinvestissement des expressions langagières dans les tests*

L’étude du langage développé autour du jeu global / local se termine avec l’analyse des réponses des élèves aux tests et questionnaire faits passer à la fin de l’expérimentation.

Extrait 8. Exp_A – Texte du test

[Question du test] « 1. Qu’est-ce que signifie le fait que la courbe représentative d’une fonction est zoomata lineare en un point ?

Donne l’exemple d’une courbe qui est zoomata lineare en un de ses points et d’une courbe qui n’est pas zoomata lineare en un de ses points (graphique et/ou formule de la fonction). »

Dans les réponses ci-dessous, les élèves associent à l’expression langagière un processus précis de vérification.

Elève MA(groupe A_6)

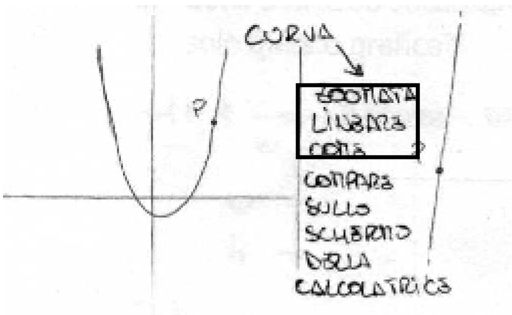

figure 3

Le passage à l’agrandissement est indiqué par une flèche (figure 3). Celle-ci semble être positionnée entre les deux mots « courbe » et « zoomata lineare » et mettre l’accent sur le passage de l’objet « courbe » à l’objet « droite » (ou « segment »). La référence à la visualisation de l’écran de la calculatrice souligne la composante visuelle de la réponse de MA.

[12] La fiche distribuée prévoyait une ligne au-dessous du texte pour écrire la réponse.

Elève CF (groupe A_3)

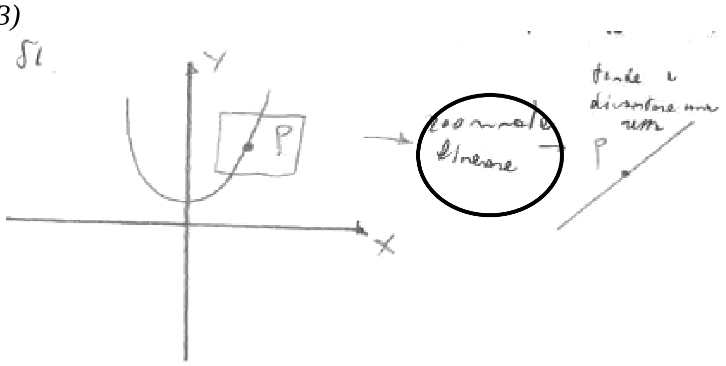

figure 4

CF ne présente que le cas d'une fonction qui a la propriété de micro-linéarité. Il propose la représentation graphique standard d'une parabole (mais il ne s'agit pas de celle considérée dans la troisième séance) et une fenêtre agrandie à côté, comme l'élève MA. L'agrandissement est indiqué par deux types de signes graphiques (un rectangle avec un point P à l'intérieur dans la représentation standard de la fonction et les flèches entre les deux tracés) qui semblent mettre l'accent sur le processus de vérification de la propriété. Le rectangle est un premier indice de la localisation du regard et renvoie au processus d'agrandissement effectué avec la calculatrice. La présence de deux flèches au lieu d'une, cette fois-ci, attire l'attention sur l'expression « zoomata lineare » et sur le passage à un point de vue local. À côté de la représentation de la droite, CF reprend la définition de « zoomata lineare » en ajoutant le verbe « tendre » à l'expression employée dans la première partie de la réponse, ce qui renforce l'accent mis sur l'aspect processus.

A la différence de l'exp_A, l'évaluation de l'exp_B repose sur la comparaison entre un pre-test et un post-test sur la tangente à une courbe. Celle-ci met en évidence la présence de l'expression langagière« zoomata lineare » dans les cas d'existence de la tangente à la courbe donnée, ce qui semble indiquer que les élèves lui attachent un sens mathématique précis.

Dans les réponses aux questions posées sur l'existence de la tangente à une courbe en un point choisi, la quasi totalité des élèves de l'exp_C se réfèrent à la micro-linéarité comme critère et donnent des réponses comparables à celles obtenues dans l'exp_B. Dans certains cas, on remarque des changements dans l'usage de l'expression. Par exemple, dans le texte de la figure 5, l'élève SM a transformé l'expression « micro-linéare » en un verbe réflexif, comme s'il voulait rendre compte de la transformation de la courbe (ce qui ne peut être cependant pas vérifié) en droite aux voisinages du point choisi.

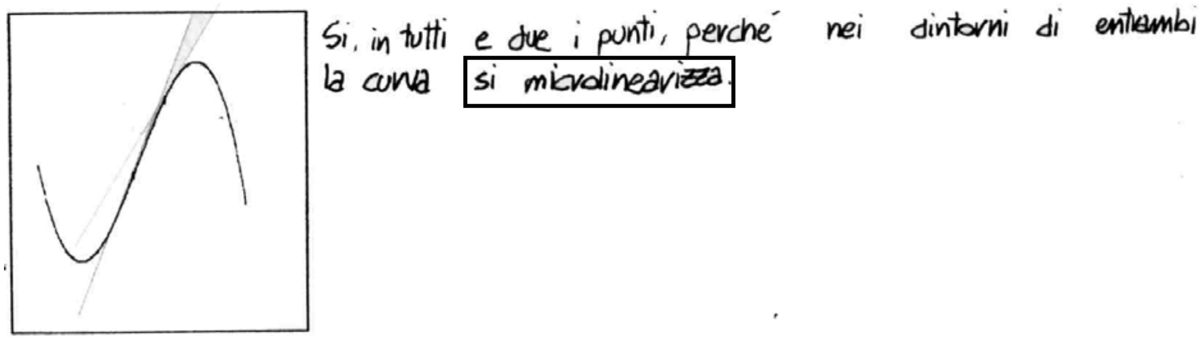

figure 5

L'extrait ci-dessus (Extrait 9) montre aussi l'évolution de l'expression réalisée par certaines élèves, qui le transforment pour le rendre adéquat à la formulation de la réponse.

Extrait 9. Exp_C – questionnaire

« La calculatrice a été notre loupe d'agrandissement. Elle a été indispensable pour aller chercher les '*micro-linearizzazioni*', sans elle le travail ne pouvait pas être proposé. »

Conclusion

Dans cet article nous avons considéré le langage développé autour du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices. L'analyse faite était centrée sur le langage oral et écrit des élèves et des enseignants. Elle n'a pas pris en compte la gestuelle et les échanges entre élèves et élèves / enseignants lesquels sont cependant une composante importante de la communication dans la classe.

Par rapport à notre première hypothèse sur le jeu global / local, l'analyse des expérimentations, notamment celle de la première séance de l'ingénierie dans les trois expérimentations montre tout d'abord que l'entrée dans un point de vue local est accessible aux élèves italiens du niveau de la Première S, dans l'environnement utilisé pour cette entrée. Elle montre aussi que la reconnaissance du phénomène de linéarité locale se manifeste très vite dans le discours des élèves, sous des formes diverses. C'est sur ces discours que cet article est centré.

Avec les expressions imagées fondées sur la perception, nous avons analysé comment une expression langagière se charge de sens mathématique. La détermination d'une expression langagière (par exemple « zoomata lineare ») peut apparaître au début comme une démarche forcée, mais il est ensuite enrichi et devient opérationnel pour les élèves. C'est en ce point que nous considérons la différences entre les expressions imagées des explorations et l'expression ainsi créé.

Dans la définition de ce langage, les analyses semblent confirmer notre hypothèse sur le recours aux calculatrices pour aider à mettre en relation d'une part les caractéristiques de cette localisation perceptives et dynamiques, d'autre part mathématiques. Ces résultats semblent alors en accord avec ceux présentés par les recherches citées concernant la pensée métaphorique. En effet, l'expression langagière choisi demande un certain temps de développement et d'évolution, la sollicitation de l'enseignant et l'entrée dans un certaine « culture » de la classe. Cependant la question didactique d'une telle construction est un point qui nécessite d'être approfondi au-delà de cette recherche, ainsi que le développement progressif de ce langage.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1996). 'L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques', J.A.Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de La Laguna, Tenerife, 27-53.

Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G. & Lagrange, J-B (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques,* Cahier de DIDIREM, Spécial n°4, IREM Paris 7, Paris.

Arzarello, F. & Robutti, O.: 2001, 'From body motion to algebra through graphing', *ICMI Studie*s, Melbourne, Australia.

Boero, P., Bazzini, L. & Garuti, R.: 2001, 'Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities', *Proceedings of the 25th PME Conference*, Vol.2, Utrecht University, the Netherlands, pp. 185-192.

Brousseau, G. (1998). Théorie des Situations Didactiques, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Castela, C. (1995). 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15** (1), 7-47.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

Groupe AHA (eds): 1999a, Vers l'infini pas à pas - Approche Heuristique de l'Analyse, Manuel de l'élève, De Boeck Wesmael, Bruxelles.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, New York: Basic Books.

Longo, G. (1998). 'The mathematical continuum, from intuition to logic', *Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences*, J. Petitot et al. (eds) Stanford U.P.

Longo G, Petitot J, Teissier B. (2000), 'Géométrie et Cognition', *Projet de Groupe de Travail,* http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html

Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'Analyse au lycée : les débuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7 e Université de Turin.
Núñez, R. (2000). 'Mathematical Idea analysis: What embodied cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics', *Proceedings of PME XXIV*, Japon, Vol I, 3-22.
Tall, D. (1989). 'Concept Image, Generic Organizers, Computer & Curriculum Changes', *For the Learning of Mathematics*, **9** (3), 37-42.
Trouche, L. (1996). *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II.