Forme des polygones

Bernard Genevès

Forme des polygones

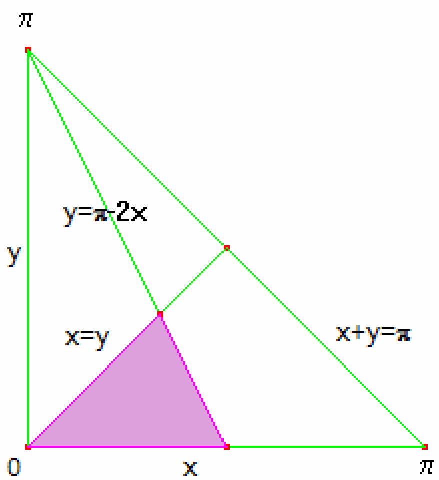
Bernard Genevès, Université Joseph Fourier

Les logiciels de géométrie dynamique comme Cabri-géomètre fournissent un environnement d'apprentissage expérimental, qui permet la déformation des objets géométriques ; un des intérêts de cette possibilité de déformation pour l'apprentissage des mathématiques est de rendre immédiatement sensible la permanence des propriétés géométriques, indépendamment de la forme des figures, et l'obtention aisée de contre-exemples.
Comme la déformation des figures géométriques est au cœur des procédés, paramétrer les formes des objets géométriques est une question qui intéresse les fondements mathématiques de la géométrie dynamique.
La recherche de telles paramétrisations est ici présentée sur le cas des triangles, mais un exemple plus représentatif est celui des pentagones équiangles convexes ; ces derniers voient leurs formes naturellement paramétrées par les points d'un pentagone régulier du plan hyperbolique. Ce dernier exemple est une reconstruction à l'aide de Cabri d'un exercice d'un livre de géométrie différentielle [T].

Une similitude ne change pas la forme d'une figure. Prenons l'exemple des triangles.
Deux triangles ont même forme s'ils sont semblables, s'il existe au moins une similitude transformant l'un en l'autre, directe ou indirecte.
L'ensemble des formes de triangles peut être défini comme le quotient de l'espace des triangles sous l'action du groupe des similitudes, autrement dit l'ensemble des classes de similitude des triplets de points du plan.
Pour que deux triangles soient semblables, il est nécessaire qu'ils aient leurs angles deux à deux égaux ; on peut démontrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante ; comme le troisième angle d'un triangle est déterminé par les deux autres, chaque forme de triangle est déterminée par la donnée de deux angles.
Il y a ainsi autant de formes de triangles, que de couples d'angles admissibles pour un triangle, c'est-à-dire que de couples de nombres pris entre 0 et π, et dont la somme est inférieure à π.
On a représenté ci-dessous tous les couples de tels nombres par les points dont les coordonnées (x,y) dans un repère cartésien vérifient simultanément :

$$0 < x < \pi \qquad \text{et} \qquad 0 < y \le x \le \pi - x - y$$

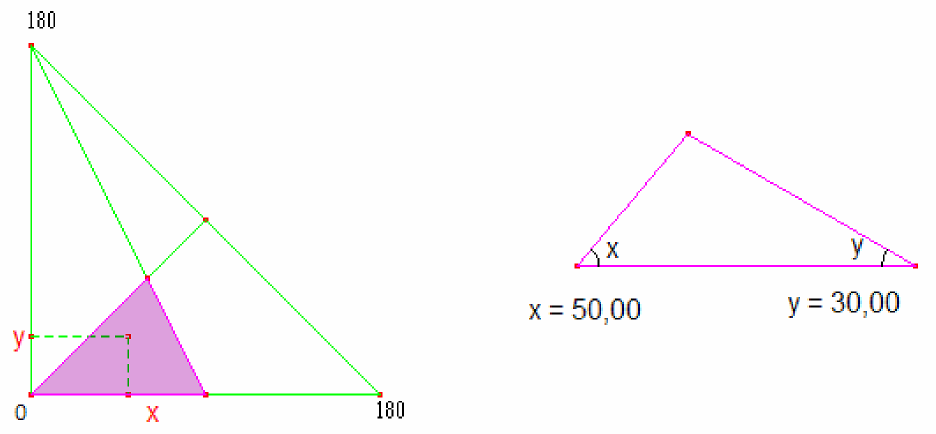
La dernière condition est introduite de façon que chaque triplet d'angles d'un triangle n'apparaisse qu'une fois.



La région solution est colorée ; elle contient une infinité de points : il y a une infinité de formes de triangles.

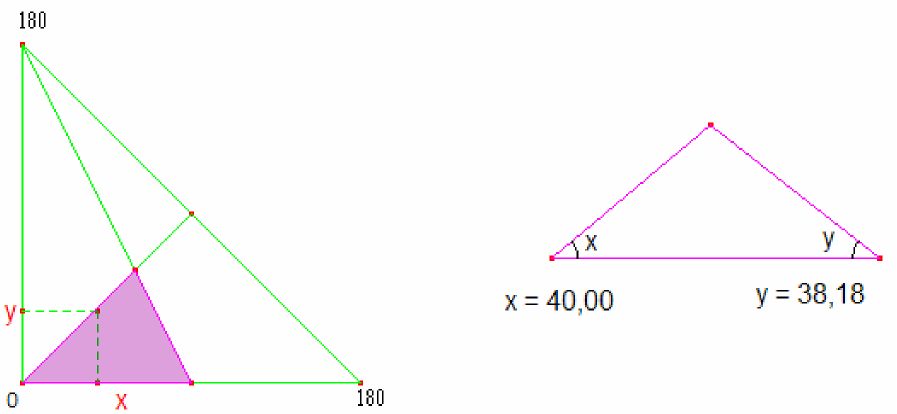
Chaque point de la région colorée représente un couple d'angles, donc une forme de triangle ; il est surprenant que cette région, qui paramètre toutes les formes de triangles, apparaisse elle-même comme un triangle.
Toutefois ceci n'est qu'un artefact de notre procédé, une conséquence de certains choix en partie arbitraires ; ce qui est certain est qu'il y a une infinité de formes de triangles. Un domaine infini comme l'intérieur de la région colorée peut être mis en bijection avec un intervalle réel ; toutes les formes de triangles seraient alors paramétrées par un intervalle réel, ce qui parait plus simple. Mais est-ce que deux paramètres voisins sur l'intervalle correspondraient à des formes voisines ?
Le quotient de l'ensemble des triplets de points du plan par l'action du groupe des similitudes hérite de ses constituants une topologie et une structure différentielle ; par des théorèmes classiques, cet espace est localement euclidien, i.e. localement homéomorphe à une partie de R^d. L'entier d est unique, et la question précédente demande : quelle est cette dimension d ? Et aussi : quelle est cette topologie ? C'est-à-dire : que signifie « voisins » ?

Une approche expérimentale
Sur la figure suivante, un point de coordonnées (x,y) est choisi dans la région colorée, et un triangle possédant des angles avec ces valeurs x et y est construit ; pour la facilité de la lecture, les angles apparaissent en degrés plutôt qu'en radians ; comme la figure est effectuée dans Cabri, le point (x,y) peut être déplacé, et le triangle avec les angles x et y est alors instantanément reconstruit ; il devient naturel de déplacer le point paramètre pour observer la déformation du triangle.
Cette manipulation donne un sens précis à la notion de paramétrisation des formes de triangles.



Cette démarche permet aussi de s'interroger sur la continuité de la paramétrisation :
Si deux points de la région colorée sont proches, est-ce qu'ils représentent des formes de triangles « voisines » ?
En déplaçant le point (x,y), si l'on choisit x et y égaux, le triangle d'angles x et y sera isocèle ; et si l'on choisit x et y *presque* égaux, le triangle d'angles x et y sera *presque* isocèle.

La fonction « angle » dans un triangle est invariante par les similitudes, et définit donc une fonction sur les classes de similitude des triangles ; comme l'angle dépend continûment des coordonnées des sommets du triangle, cette fonction est continue ; inversement, le groupe de similitudes est transitif sur les couples de points du plan, et une fois connus deux sommets d'un triangle, les deux angles à la base déterminent (continûment) le troisième sommet ; ceci assure que la paramétrisation précédente est bicontinue. Cet argument suppose les angles non nuls.



La zone de la région colorée voisine de la droite d'équation x = y correspond effectivement à des formes de triangles proches des triangles isocèles ; dans la phrase précédente, le terme « voisine » est au sens de la distance euclidienne du plan ; ainsi, la distance euclidienne sur la région colorée est un bon candidat pour mesurer la proximité des formes de triangles.

Si l'ensemble qui paramètre les formes de triangles est naturellement muni d'une distance, le concept de proximité y a un sens, et aussi celui de triangle. Dire que la région qui paramètre les formes de triangles est elle-même un triangle peut alors prendre un sens.
La correspondance ainsi construite avec les points d'une région du plan est comme une carte géographique d'une partie de l'ensemble des formes de triangles, c'est une carte au sens des variétés différentielles.
La suite de cet exposé examine d'autres polygones, avec une approche différente, où les sommets sont marqués.

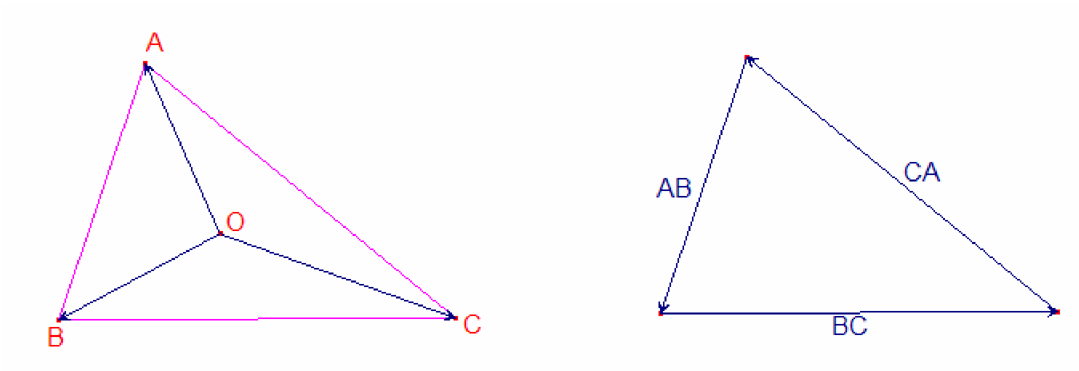
Un espace vectoriel de polygones

Le cas des quadrilatères indique que quand le nombre de sommets augmente, la situation se complique : si deux quadrilatères sont semblables, ils ont des angles homologues égaux ; mais inversement un rectangle a les mêmes angles qu'un carré sans lui être nécessairement semblable. Pour que deux rectangles soient semblables, il est nécessaire qu'ils aient même rapport longueur/largeur. On conjecture alors l'existence d'une famille infinie de rectangles non semblables.

Le cas des pentagones se prête mieux à une représentation géométrique que celui des quadrilatères. Nous allons étudier le cas des pentagones ayant tous leurs angles égaux, l'équivalent de ce que sont les rectangles pour les quadrilatères.

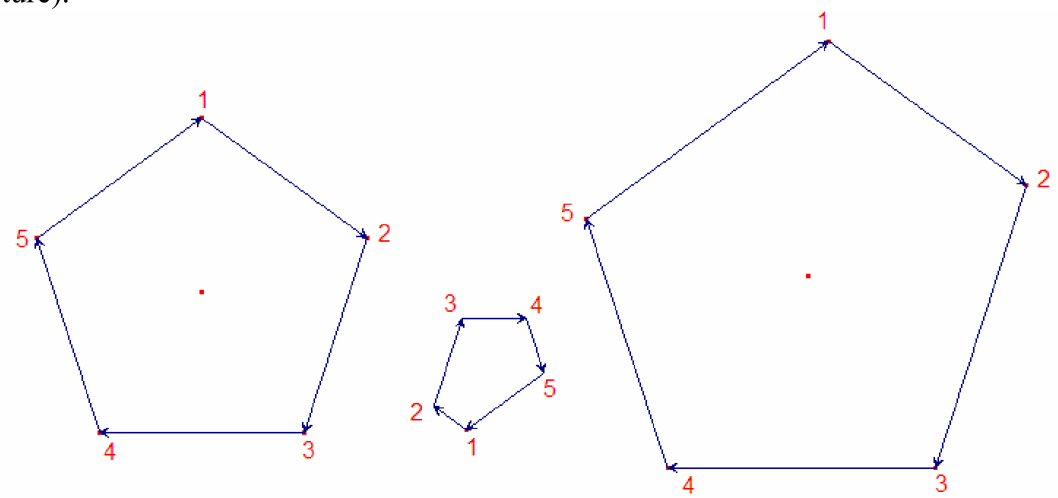
Une des étapes consiste à évaluer en quoi les formes de deux polygones peuvent différer ; c'est-à-dire en quoi deux polygones peuvent différer, à une similitude près.

Le choix d'une origine permet d'identifier les sommets des polygones à des vecteurs, sur lesquels la différence est définie. Donnons-nous deux triangles, on peut les supposer de même centre en usant d'une translation, si on travaille à une similitude près. Chaque triangle s'identifie alors à un triplet de vecteurs de somme nulle, et la différence des deux triangles de même centre est un triangle de même centre.



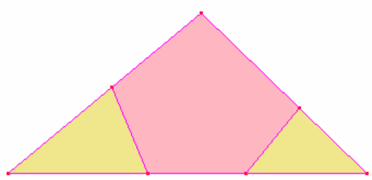
Le triangle ABC s'identifie au triplet de vecteurs (OA, OB, OC).
Une autre possibilité est d'identifier le triangle avec le triplet de vecteurs (AB, BC, CA).

L'ensemble des polygones à n sommets de centre donné s'identifie a l'espace vectoriel des n-uplets de vecteurs du plan de somme nulle, de dimension n-1.
La figure ci-dessous montre la différence de deux pentagones à côtés deux à deux parallèles, le petit pentagone au centre est la différence entre le pentagone régulier de gauche, et le pentagone de droite (les polygones sont représentés avec des centres distincts pour la facilité de lecture).



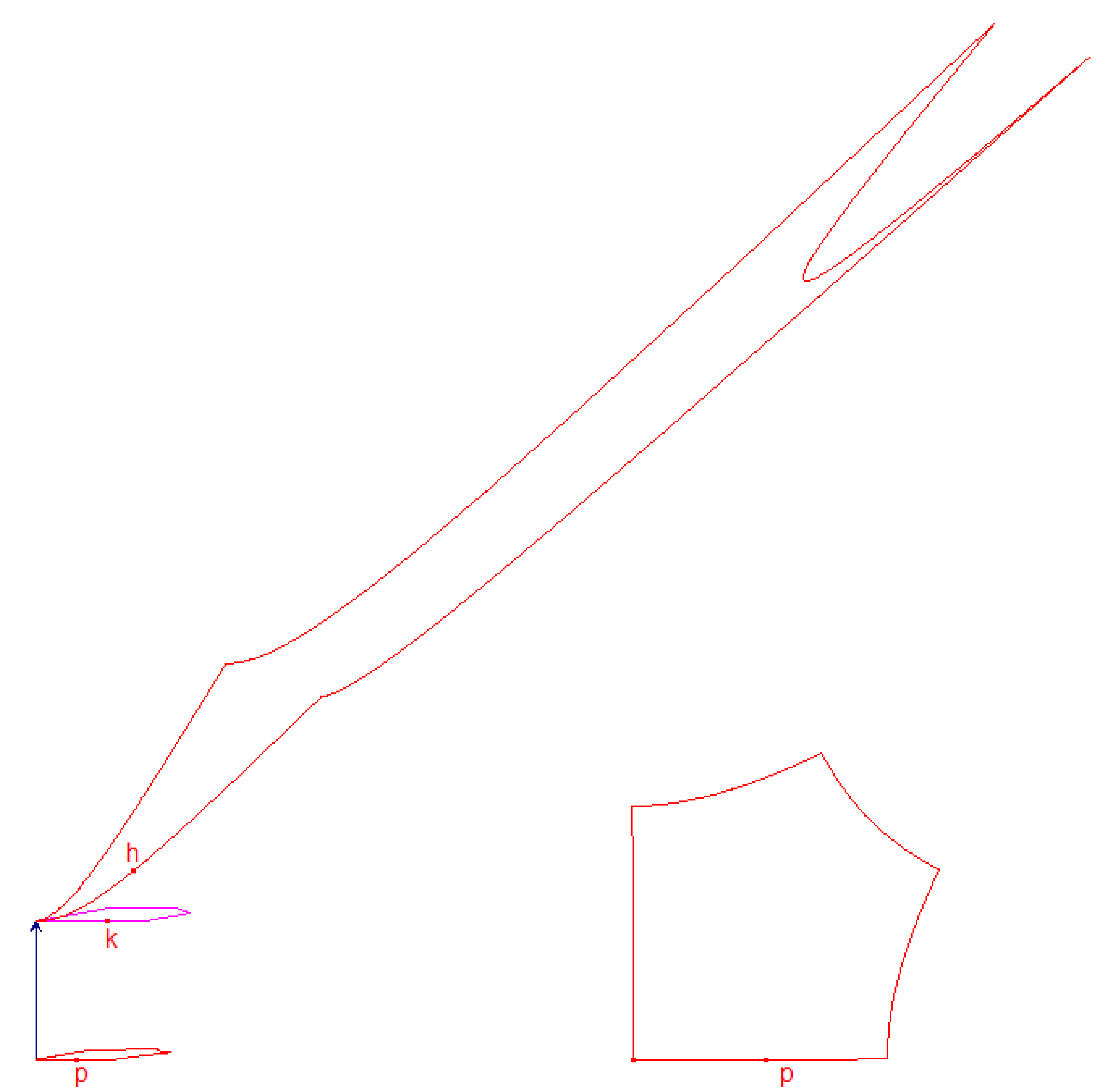
Aire et distance

Pour évaluer la différence de formes entre les deux pentagones précédents, on va utiliser l'aire de la différence. L'aire orientée d'un pentagone peut s'écrire comme la différence d'aires de triangles : $z^2 - x^2 - y^2$, où z^2 désigne l'aire du grand triangle qui englobe le pentagone rose, x^2 et y^2 désignent les aires des petits triangles jaunes.



A une homothétie près, il est possible de se limiter aux pentagones d'aire unité :
$z^2 - x^2 - y^2 = 1$; cette relation peut alors s'interpréter comme l'équation d'une surface de l'espace, rapporté aux coordonnées x, y, z. Certains des points (x, y, z) de la nappe supérieure ($z > 1$) de cet hyperboloïde correspondent à une forme de pentagone de la catégorie étudiée, convexe et à côtés parallèles à ceux d'un pentagone régulier donné.

Comme précédemment pour les formes de triangles, où les coordonnées utilisées correspondaient à des angles de triangle, et voyaient leur plage de variations limitée, les coordonnées (x, y, z) sont aussi limitées.
On peut observer ces limitations dans Cabri, en faisant varier la forme du pentagone qui sert de modèle ; la construction d'un point de coordonnée (x, y, z), avec un procédé de perspective cavalière, montre la partie de la surface $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ qui correspond aux pentagones étudiés.



La projection centrale sur le plan $z = 1$ de centre l'origine $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ envoie la nappe $z > 1$ de la surface $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ à l'intérieur du disque $x^2 + y^2 = 1$.
La projection centrale de la même surface sur le plan $z = 0$ de centre $(x, y, z) = (0, 0, -1)$ est également intéressante.
La partie de surface correspondant aux pentagones étudiés est représentée ici, sur l'hyperboloïde, et dans les deux projections ; cette même portion de surface, vue dans la deuxième projection, est aussi représentée en vraie grandeur, et non plus en perspective, en bas à droite de la figure. Elle apparaît comme un polygone curviligne.
Chaque point à l'intérieur de ce pentagone curviligne correspond à une forme de pentagone du type étudié.

Comme dans le cas des triangles, il est possible de tester si deux points proches, à l'intérieur du pentagone curviligne, correspondent à deux formes de pentagones voisines.

Toutefois, la distance entre points « proches » n'est pas la distance euclidienne comme dans le cas des triangles (dans aucun des trois modèles, l'hyperboloïde ou les deux disques) ; on peut voir apparaître dans le polygone curviligne certains signes d'une géométrie différente de l'euclidienne. Un retour sur la définition de l'aire $z^2 - x^2 - y^2$ montre que ce polygone curviligne doit être en fait régulier, ses cinq côtés doivent avoir la même longueur, et ses cinq angles doivent être égaux (tous droits).

Un pentagone avec cinq angles droits n'existe pas en géométrie plane euclidienne, la somme des angles d'un pentagone y est 3π.

En revanche, ceci est possible en géométrie hyperbolique : la nappe de l'hyperboloïde, le premier disque, dit modèle de Klein-Beltrami, le deuxième disque, dit modèle de Poincaré, munis de distances convenables, sont effectivement des modèles classiques du plan hyperbolique. On voit donc ici se construire un lien explicite entre un problème euclidien et une figure de géométrie hyperbolique, à l'occasion d'un problème posé par la géométrie dynamique, et qui se laisse bien illustrer par elle.

Références

[T] *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Thurston, Princeton Univ. Press, 1997 (exercice 2.3.12)

Polygones du plan et polyèdres hyperboliques, Bavard C. & Ghys E., Geom Dedicata, 1992.