Les G.N.E. comme outils d'élargissement du champ conceptuel et des représentations géométriques en formation des enseignants

Yves Martin

Les G.N.E. comme outils d'élargissement du champ conceptuel et des représentations géométriques en formation des enseignants

Yves Martin – IUFM de La Réunion

Résumé : *les programmes, scolaires ou universitaires, sur la géométrie sont construits autour d'une optimisation pour la structure euclidienne puisque c'est le seul référent géométrique enseigné. Cela conduit à des réflexes géométriques qui embarquent la linéarité (structure affine, produit scalaire) sans que l'on en ait toujours conscience. Les outils de géométrie dynamique actuels permettent une présentation rapide, non technique, et une exploration pertinente d'autres géométriques métriques dans lesquelles nous pouvons expérimenter sur les versions absolues de théorèmes que l'on pourrait penser affine (théorèmes des milieux dans un triangle) ou liés aux propriétés linéaires du produit scalaire. Nous proposons un parcours, réalisé en PLC2 Maths, centré sur la géométrie élémentaire du triangle, dans lequel nous verrons que de nombreux théorèmes sont absolus.*
Sur la base d'un plongement dans une homologie didactique intense, l'objectif - avec d'autres exemples hyperboliques ou elliptiques - est de replacer les outils utilisés à leur place : dans l'efficacité de la situation et non plus dans un regard méthodologique unique, se pensant « universel».

I. Organisation et objectifs de la formation

Au delà du contenu disciplinaire sur les géométries non euclidiennes (G.N.E.) qui vise à proposer un recul culturel par rapport à l'euclidien, un des objectifs de cette formation est de confronter les stagiaires aux approches empiristes de l'enseignement. Tout comme à l'école les enseignants disent aux élèves ce qui, dans leur environnement, est reconnu comme « droite », ou encore « droites perpendiculaires », puis proposent outils et savoir-faire pour *tracer* de tels objets et *construire* les figures élémentaires y affairant, de même les stagiaires vont être plongés dans un monde géométrique nouveau, avec les outils appropriés, de tracés et de construction, et vont explorer le plan géométrique qui leur est proposé.

Ce sera particulièrement vrai pour la première séance, où la géométrie hyperbolique va être présentée dans un modèle donné a priori. L'effet de surprise s'atténuant, cela le sera également pour la géométrie elliptique, parce que cette géométrie est éloignée de l'expérience sensible, mais avec le regard déjà plus distant d'un enseignant qui se sait en formation, et l'évolution sera intéressante à observer.

Houdement et Kuzniak (1996) ont introduit la notion d'homologie didactique qui est une stratégie dans laquelle le formateur met en scène du savoir comme il souhaiterait que ses stagiaires le fassent dans leur classe. Cette notion est présentée par les auteurs à partir de pratiques observées dans la formation d'enseignants du premier degré. Notre approche des géométries non euclidiennes peut être vue comme une transposition de cette notion à la formation des PLC2 : il s'agit ici aussi, non de travailler des contenus à enseigner, mais de susciter une réflexion sur les objets géométriques et leur enseignement.

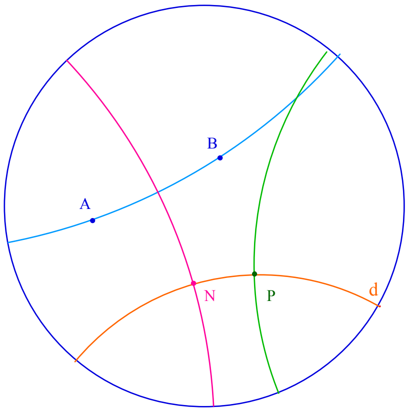
Il s'agit aussi d'explorer l'évolution (très rapide) des représentations des stagiaires au cours des séances, afin de dégager quelques invariants spécifiques d'une formation accélérée utilisant massivement l'exploration par la géométrie dynamique pour optimiser des maquettes de formation. Pour cela une prise d'information sur les activités des stagiaires est organisée de manière systématique.

Le logiciel Cabri géomètre se comportant comme un micro monde, nous avons mis en place plusieurs barres de menus bien spécifiques : une pour la géométrie hyperbolique, une pour la géométrie elliptique, et une troisième, encore hyperbolique, pour travailler sur la théorie des faisceaux dans l'axiomatique de Bachmann et voir que de nombreux résultats sur les triangles sont aussi des résultats sur les trilatères, notion qui sera précisé au § 7.

Cette expérience, s'est déroulée sur 4 séances de 4 h. Le plan d'ensemble du module est présenté aux stagiaires, en particulier pour mettre en évidence qu'après deux séances d'exploration de géométries non euclidiennes standards, éventuellement un peu déstabilisantes, une séance de synthèse replacera le tout dans un cadre théorique général qui donnera un point de vue englobant sur ces modèles. Cette synthèse permettra de séparer les géométries et en particulier de dire ce qu'a de spécifique la géométrie euclidienne. Une dernière séance proposera d'explorer quelques exercices usuels (de lycée) dans le contexte absolu et de voir l'évolution des arguments ou des constructions.

II. La séance sur la géométrie hyperbolique

Il est historiquement, épistémologiquement naturel, et didactiquement efficace de commencer par la géométrie hyperbolique : si les représentations vont être quelque peu bousculées un temps, les concepts eux vont s'étendre sans difficultés majeures, ce qui sera moins le cas pour la géométrie elliptique. Nous avons choisi un modèle *conforme* et plus précisément le modèle borné standard. Le *modèle* du disque de Poincaré est présenté aux stagiaires par quelques manipulations n'induisant aucune information sur les activités à venir: les points du plan hyperbolique sont ceux l'intérieur d'un disque, appelé horizon dont les points sont les points à l'infini de cette géométrie. La droite passant par deux points est la trace du cercle passant par ces deux points et orthogonal au cercle horizon. Le modèle est conforme, et donc la perpendiculaire à une droite issue d'un point est orthogonale à la droite et à l'horizon (pour être une droite). Les stagiaires disposent d'outils de tracé (les macros « droites, segments, demi-droite) et de construction (les macros perpendiculaire, milieu, médiatrice, mais aussi cercle, bissectrice) et de transformations (symétries centrales et orthogonales[1]), et quelques autres dont la découverte se fera au cours des activités.



La première activité consiste à construire et explorer la double orthogonalité : de N on mène la perpendiculaire à une droite (AB) puis la perpendiculaire *d* à cette droite en N. D'un point P de *d*, on mène la perpendiculaire à *d*.

L'objectif est de découvrir que non seulement cette droite n'est pas perpendiculaire commune à (AB) et *d* mais peut aussi ne pas couper la droite (AB) : le quadrilatère à 3 angles droits peut ne pas être un « quadrangle ». D'où l'unicité de la perpendiculaire commune – mais dans quels cas exactement – et un questionnement sur le nouveau statut du parallélisme.

La naïveté des premières réponses, par le vocabulaire euclidien utilisé, est à la hauteur de la surprise, et surtout, permet d'illustrer comment fonctionne l'apprentissage : un réinvestissement de nos représentations dans un champ où elles perdent leurs pertinences.

Selon la position du point P, on obtient rectangle ou pas.

La perpendiculaire à d en P n'est pas perpendiculaire à (AB).
La notion de parallèle à l'air de changer

Puis il s'agissait de faire une figure permettant de conjecture la perpendiculaire commune : on pouvait (entre autres) prendre de P la perpendiculaire à (AB) et chercher quand

[1] Pour les stagiaires, la symétrie orthogonale et la symétrie centrale sont des données premières, proposées "comme telle" sous forme d'un outil CABRI disponible. Dans le logiciel, elles sont définies conformément aux axiomes de Bachmann (voir Annexe).

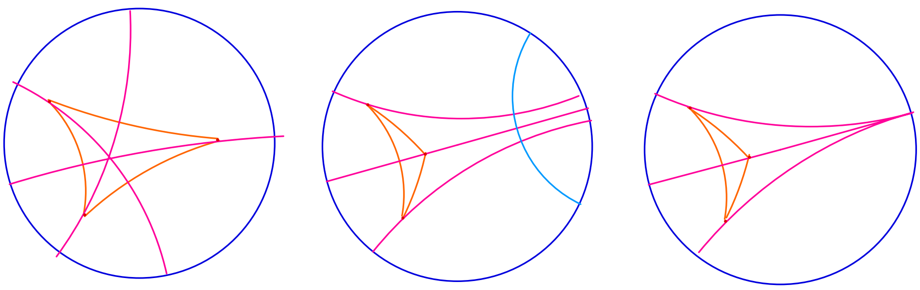
les deux perpendiculaires coïncident. Il est intéressant d'observer les premières représentations s'installer, comme celle-ci, cohérente :

le parallélisme est une double orthogonalité ?

ou celle-ci, impressionnante d'anticipation, d'une certaine façon vraie, mais à ce moment de l'activité, injustifiable, juste une réflexion :

deux droite ne possèdent qu'une perpendiculaire commune au plus. l'orthogonalité et le parallélisme n'ont aucun rapport.

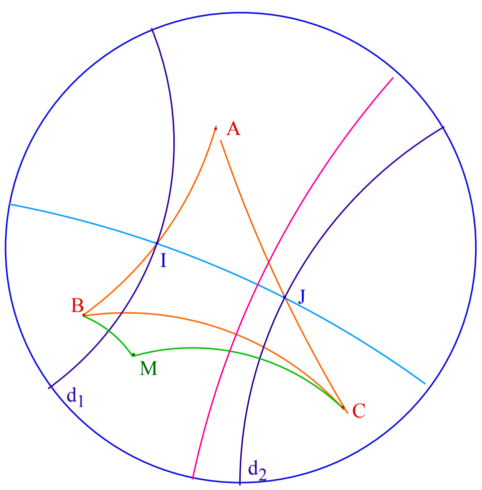
L'unicité de la perpendiculaire commune à deux droites non sécantes étant conjecturée, pour mettre en évidence un statut plus précis des droites, il est assez efficace de les observer non pas par deux mais par trois. Cherchons à tracer les hauteurs d'un triangle :



Les hauteurs d'un triangle peuvent être :

a) concourantes
b) avoir une perpendiculaire commune
c) parallèles

Sur cette activité, on peut mettre en évidence des statuts plus précis des droites. On vérifie expérimentalement que les hauteurs ont « quelque chose en commun », soit un point, soit un axe (la perpendiculaire commune deux à deux est commune aux trois), soit un « point à l'infini ». Dans ce cas, on dit, en institutionnalisant une situation explorée empiriquement, comme en classe, que les hauteurs sont « en faisceaux », pour dire qu'elles ont cette propriété d'avoir quelque chose en commun. L'activité suivante consistait à vérifier que les médiatrices d'un triangle sont aussi en faisceau. Cette propriété étant admise (conjecture), on est en mesure de montrer, rapidement, notre premier théorème absolu … le même qu'en 4° :



ABC est un triangle, I et J les milieux de deux côtés, Δ la droite (IJ), d_1 et d_2 les perpendiculaires à Δ en I et J et $M = s_{d1}(B)$.

Un calcul algébrique basé sur la décomposition des symétries $s_I = s_\Delta o s_{d1}$ aboutit à $M = s_{d2}(C)$.

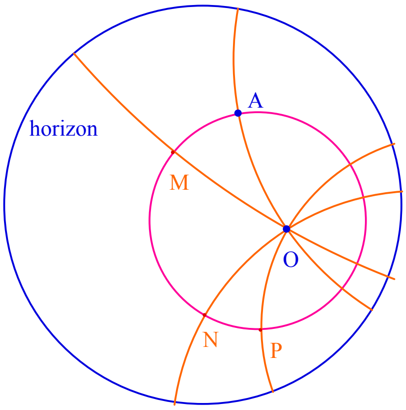
On en déduit alors facilement, *par l'utilisation d'un faisceau à axe*, une première version absolue du théorème des milieux :

Dans un triangle la droite qui joint les milieux de deux côtés possède une perpendiculaire commune avec le troisième côté qui est le médiatrice de ce troisième côté.

L'argument principal étant celui-ci :

d_1 et d_2 ont (IJ) pr perpendiculaire commune
on déduit que la médiatrice de [BC] est
aussi perpendiculaire à (IJ) (faisceaux de droites)

La suite de la séance aborde le cercle. Nous sommes volontairement dans une situation où la notion de distance n'existe pas : les droites données aux stagiaires sont *non graduées*, non pas parce qu'elles ne le peuvent pas, mais pour montrer que le rapport au nombre est une autre démarche, certes fondamentale – c'est toute la richesse de la trigonométrie – mais non indispensable pour ce qui est des *propriétés* des figures.



Le cercle de centre O passant par A est le lieu des images des symétriques de A par rapport aux droites du faisceau à centre O.

On vérifie alors que dans le modèle du disque de Poincaré c'est aussi un cercle euclidien.

Une telle définition, non métrique, a d'abord surpris. Les fiches de travail demandaient de vérifier quelques propriétés sur les triangles inscrits dans un cercle et le lien avec le concours des médiatrices.

Il en résulte qu'on peut étendre la définition aux autres cas de faisceau de médiatrices, et alors définir d'autres notions de cycles :

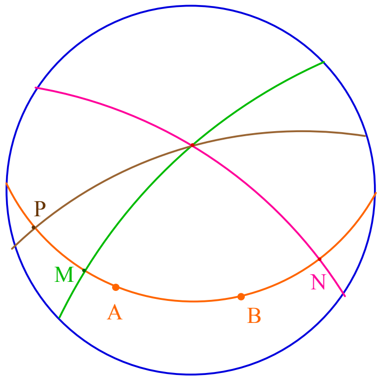
quand les droites sont	le faisceau est dit	les courbes images d'un point sont
concourantes	à centre	des cercles
à perpendiculaire commune	à axe	des équidistantes
parallèles	sans support	des horicycles

Ainsi la notion de faisceau trouve un second aboutissement : comme généralisation des droites concourantes ou parallèles, il permet d'abord de rendre compte des propriétés des droites remarquables, et ensuite de généraliser les cercles en cycles. On notera que contrairement au cas euclidien, l'équidistante n'est pas une droite, et l'horicycle non plus.

Compte tenu du discours qui sera tenu lors de la séance 3, mais aussi pour préparer la séance suivante, nous avons mis l'accent sur les faisceaux comme outil de représentation fiable. Nous avons insisté sur le parallèle avec le fonctionnement en classe : comme les élèves peuvent manipuler facilement les vecteurs (au collège) avant une conceptualisation claire (au lycée avec l'ensemble des opérations), eux aussi manipulent les faisceaux comme outils avant même d'en avoir une définition bien précise, car le contexte général dans lequel cela aura du sens n'est pas encore installé.

III. La séance sur la géométrie elliptique

Contrairement à la séance précédente, le modèle elliptique a été justifié et construit à partir de la géométrie sur la sphère, par projection stéréographique.



Il en résulte le modèle plan à l'intérieur d'un disque : les points sont ceux du disque et de la moitié de l'horizon, les points de l'horizon diamétralement opposés étant identifiés dans le plan elliptique. Les droites sont les arcs de cercle coupant l'horizon en deux points diamétralement opposés (et donc en un seul point elliptique).

Pour l'orthogonalité, il suffit de préciser que le modèle est conforme. La première activité consiste à observer que toutes les droites orthogonales à une droite donnée sont concourantes en un point appelé pôle de la droite.

Les justifications demandées portaient sur l'origine du modèle, on trouve aussi bien :

Grâce à une rotation, je peux me ramener à étudier les droites orthogonales à l'équateur.
Les droites orthogonales à l'équateur passent par les deux pôles (N et S)

qu'une vraie distance vis à vis de ce qui est demandé :

Si on considère la droite comme l'équateur, le pole porte bien son nom !

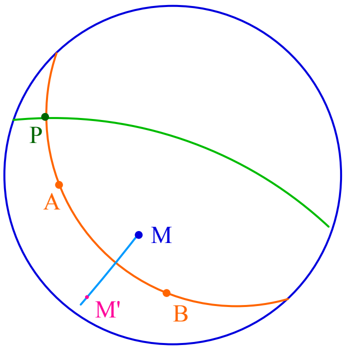
mais aussi, une intuition (là encore) extraordinaire et profonde de la situation, obtenue en quelques minutes de manipulation qui laisse rêveur …

il n'y a pas d'infini, donc deux ~~même~~ droites perpendi-culaires à une m droite se coupent un un même point qui remplace l'infini pour le cas de ces droites.
(AB) est l'équateur et S est le pôle.

On en déduit alors que tous les points ont une polaire (droite dont ils sont le pôle). Il en résulte[2] que, puisque deux droites sont sécantes, et donc que les seuls faisceaux sont à centre, ils sont aussi à axe. En effet deux droites, sécantes en A, ont une unique perpendiculaire commune : la polaire de A. On vérifie que les droites remarquables sont en faisceau …

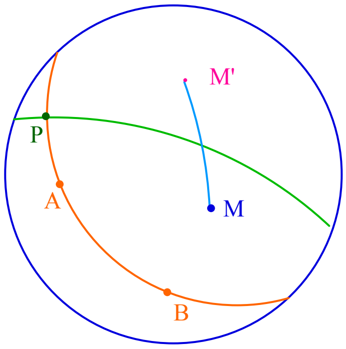
Le cœur de la séance est centré sur le comportement de la symétrie orthogonale. Le résultat que l'on veut faire observer est celui-ci :

[2] Nous sommes bien conscient d'aller un peu vite … il s'agit d'aller rapidement à l'essentiel.



Dans cette partie du

comporte comme un pliage classique autour de la droite : M' est, perceptivement - c'est-à-dire "euclidiennement" - de l'autre côté de la droite(AB), et on imagine bien que (AB) coupe [MM'] en son milieu.



Dans cette partie du plan, le comportement est

droite (AB) : en déplaçant P on voit que le point fixe de la perpendiculaire en P passe par un point fixe de [MM'].

Sur cette activité, ce ne sont plus les représentations qui sont perturbées mais bien les concepts les plus archétypiques comme le pliage, installés depuis l'école primaire, qui sont bouleversés, puisque nous allons arriver à écrire une phrase aussi imprévisible en début de séance que celle-ci (premier *théorème* elliptique de la séance, car il est *démontré*) :

Théorème ~~la~~ toute symétrie orthogonale est une symétrie centrale.

Une conséquence immédiate du fait qu'une symétrie orthogonale soit une symétrie centrale de centre son pôle concerne les points fixes de la symétrie centrale : outre le centre, tous les points de sa polaire sont aussi points fixes, comme points fixes de la symétrie orthogonale. Mais il doit être difficile, même pour les esprits les plus perspicaces, de sortir aussi rapidement des représentations construites par tant d'années de pratique euclidienne :

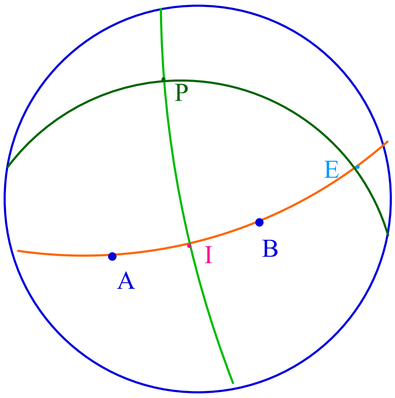
Préciser tous les points fixes de la symétrie centrale de centre A. $s_A = s_b \circ s_c$

C'est l'intersection des points fixes des symétries orthogonales s_b et s_c.

C'est donc A.

… ce qui, *a contrario*, justifie à nos yeux, avant d'enseigner, une initiation à ces géométries non euclidiennes, pour apprendre à quel point les représentations de chacun, peuvent être plus fortes que la plus élémentaire des déductions logiques.

À partir de ce moment, la séance a été assez éprouvante, les représentations étant malmenées les unes après les autres, dans une logique implacable : avec la définition vue à la séance précédente, on construit, certes, facilement les cercles, mais la propriété précédente montre qu'il y a un cas particulier : toute droite est un cercle de centre son pôle. De plus, comme il n'y a qu'un type de faisceau, les équidistantes sont aussi des cercles …



Nous terminons la séance sur la recherche de milieux de deux points A et B.

Étant donné deux points A et B et un point I sur (AB). On construit la perpendiculaire Δ à (AB) en I, et A' = s_Δ(A). On cherche les positions de I pour que A' soit en B. On trouve deux solutions (ci contre).

Autrement dit, deux points A et B ont deux milieux et deux médiatrices, orthogonales en le pôle de (AB). La réunion des deux s'appelle alors le *médiateur* de A et B.

Vos explorations en 7.a et 7.b. Que peut-on conjecturer pour le triangle PIE ?

7a A' se retrouve en B pour deux positions de I
on aurait donc deux médiatrices.
7b polaire (I) = (PE)   Les médiatrices sont (PE) et (PI)
polaire (E) = (PI)
IPE est tripolaire

L'utilisation de la relation pôle-polaire permet d'écrire simplement :

Preuves du 7.d (votre troisième théorème elliptique)

(PE) est la polaire de I => $s_I = s_{(PE)}$
(PI) est la polaire de E => $s_E = s_{(PI)}$
IPE tri polaire.

Là encore, au delà du résultat elliptique en soi, un objectif de formation est de montrer qu'étant dans une géométrie, il est naturel et efficace d'utiliser pleinement tous les outils et concepts de cette géométrie : l'utilisation, en classe, du barycentre ou du produit scalaire est du même ordre de pertinence. La question se pose alors d'un regard plus distancié sur toutes ces géométries et surtout celle d'une approche synthétique qui saurait rendre compte aussi bien des faisceaux sans support hyperboliques que de la polarité elliptique.

IV. Axiomatique de Bachmann – Séance sur les trilatères.

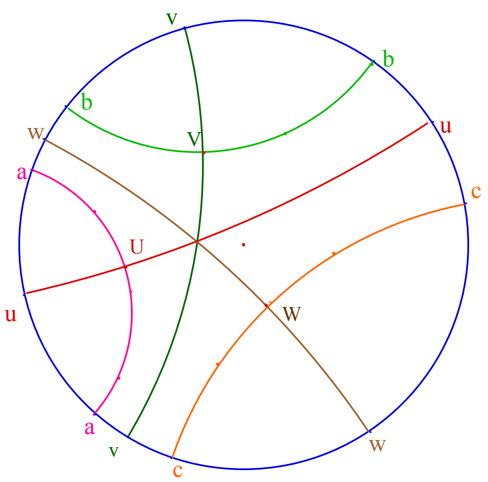
L'axiomatique de Bachmann répond à la question précédente. Elle s'inscrit dans l'approche algébrique de la géométrie initiée par Klein. Sur la base d'un groupe et d'un ensemble de générateurs, stable par conjugaison, Bachmann construit une géométrie à partir de cinq axiomes : deux d'incidence (classiques) et deux sur les symétries[3] qui demandent que la composée de trois symétries ayant un point ou un axe en commun est une symétrie orthogonale et un axiome de non-dégénérescence (il existe un triangle rectangle).

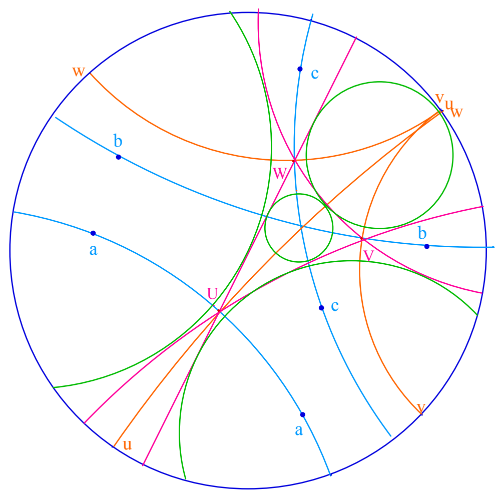
Dans cette axiomatique, on dit que trois droites sont en faisceau si la composée des trois symétries d'axe ces droites est une symétrie. Il y a donc un axiome sur les droites en faisceau à axe et un sur les droites en faisceau à centre, et c'est l'essentiel de la géométrie.

[3] Le format de ce texte ne permet pas de détailler on peut aller plus avant sur cette axiomatique, avec la démonstration d'une dizaine de théorèmes et de nombreuses figures manipulables en CabriJava sur : http://www.reunion.iufm.fr/Dep/Mathematiques/abracadabri/abraJava/GNECJ/index.html

Bachmann montre alors nombre de résultats absolus sur les triplets de droites qui ne sont pas en faisceaux (trilatères), ce que la seconde[4] partie de la séance va permettre d'explorer.

La première activité consiste à travailler sur les hauteurs d'un trilatère et de vérifier que, quand elles existent toutes les trois, les hauteurs sont en faisceaux (à gauche) puis de vérifier





que les hauteurs sont aussi bissectrice du triangle orthique du pied des hauteurs (à droite avec le cas où l'orthocentre est un point à l'infini)

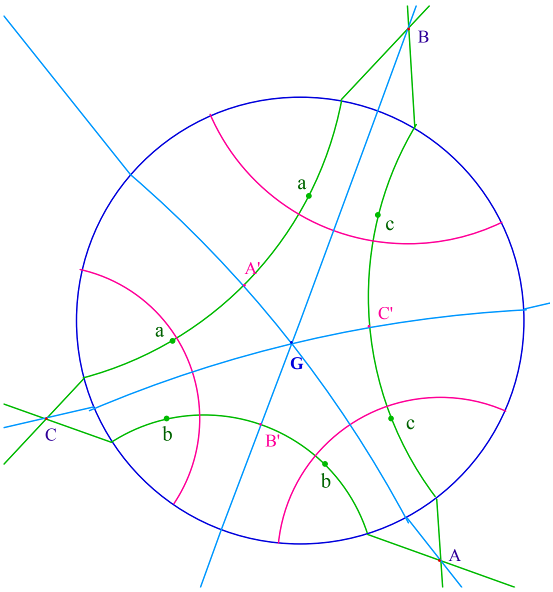
Pour cela, afin que la figure fonctionne indépendamment du type de trilatère (à droite ci-dessus, certaines droites sont sécantes d'autres pas) il faut des constructions sur les faisceaux indépendantes du type de faisceaux. Ces constructions existent, sont basées sur le théorème de Hjelmslev, et sont installées dans une barre de menu hyperbolique complétée de macros sur les faisceaux.

L'extension vécue comme la plus troublante de cette séance a été celle des médiatrices et médianes de trilatères quand les faisceaux ont deux à deux une perpendiculaire commune, en prenant les axes de symétrie des perpendiculaires communes comme médiatrices. A partir de ces médiatrices, on construit les milieux[5] d'un trilatère, et donc on peut s'intéresser aux médianes, puisque l'on sait (vu dans la première partie de la séance) que par un point il passe une et une seule droite appartenant à un faisceau donné … et qu'une macro construit cette droite.

---

[4] La première partie a consisté à présenter cette axiomatique, après l'avoir replacée dans son contexte historique (Bachmann a travaillé avec Hilbert) et à séparer les trois géométries principales par 4 axiomes supplémentaires.

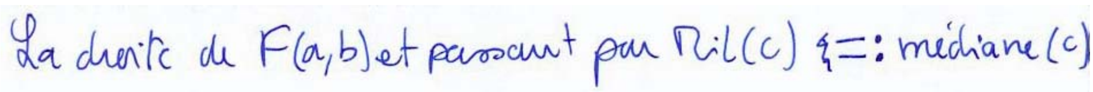
[5] On notera que, *comme dans le cas du triangle*, les milieux du trilatère n'ont de sens que si les trois couples de faisceaux sont de même nature.

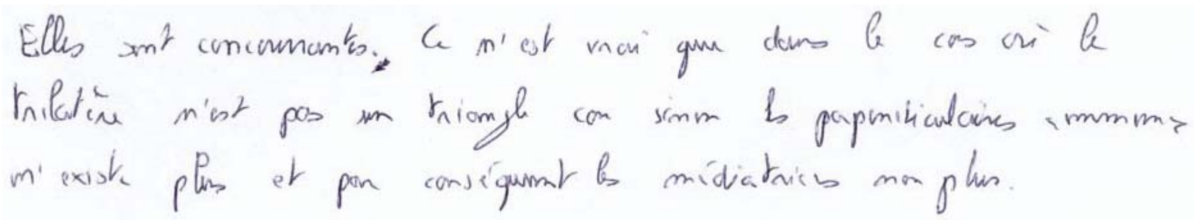


L'activité consistait à construire la figure *à l'intérieur* de l'horizon : les droites vertes a, b, c sont données, les milieux A', B', C' sont construites et à partir de là, les médianes bleues.

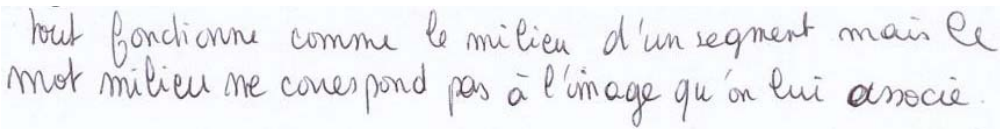
La partie extérieure, proposée au lecteur mais non disponible en formation[6], montre la cohérence de la construction dans le cadre du plongement du plan hyperbolique dans un plan idéal projectif : les points A, B, C sont les sommets du triangle idéal associé, on voit que les droites idéales associées aux médianes passent bien par ces sommets.

Les stagiaires n'ayant pas à leur disposition ce regard du prolongement, même seulement culturel, ont, certes, construit cette extension :


La droite de F(a,b) et passant par Mil(c) {=: médiane(c)


Elles sont concourantes. Ce n'est vrai que dans le cas où le trilatère n'est pas un triangle car sinon les perpendiculaires communes n'existe plus et par conséquent les médiatrices non plus.

mais l'ont trouvé généralement assez peu naturelle :


tout fonctionne comme le milieu d'un segment mais le mot milieu ne correspond pas à l'image qu'on lui associe.

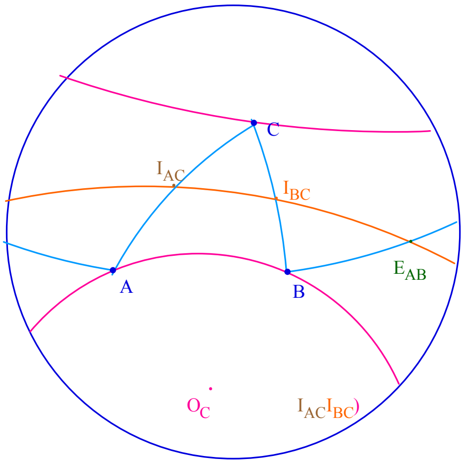
D'une manière générale, autant la séance elliptique avait été éprouvante, autant celle-ci fut vécue comme légère, libératrice, apportant une nouvelle cohérence, plus large, à ce que l'on avait pu croire un moment détruit. Un stagiaire, particulièrement enthousiasmé par cette théorie des faisceaux a même expliqué, à sa manière, la cohérence interne de la formation :

> « Après avoir défait le nœud des droites au centre du cercle (les cycles issus des différents type de faisceaux de la séance 1), vous venez maintenant de les défaire aux sommets des triangles (les trilatères) ».

V. Considérations euclidiennes vues dans un contexte absolu

La dernière séance devait être consacrée à un retour à l'euclidien, mais en pratique, nous avons consacré une moitié de séance à des compléments elliptiques, en particulier – dans le cadre du retour à l'euclidien – pour observer que la géométrie elliptique ne vérifie pas des axiomes implicites chez Euclide comme l'axiome de Pasch.

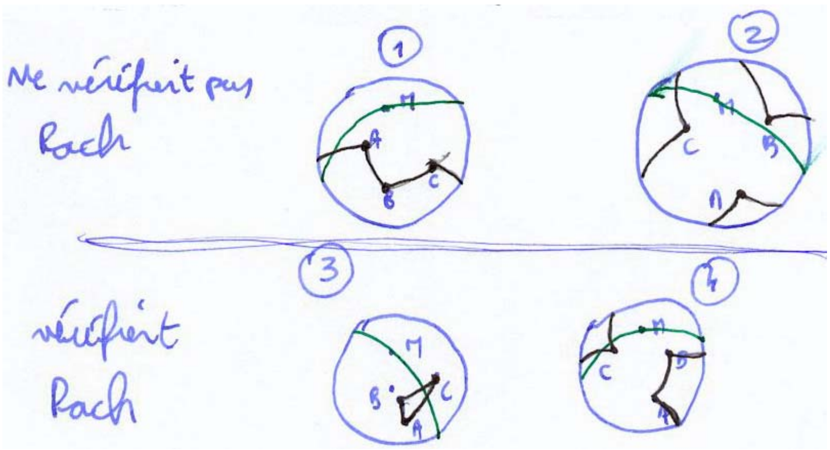
[6] Cela pourrait être l'occasion d'une exploration, mais il faut rester réaliste, il y a tant de concepts nouveaux …



La première activité consistait à revenir sur le théorème des milieux pour démontrer que les milieux sont alignés par trois. Pour cela, on redémontre, en utilisant les pôles et polaires, le théorème des milieux absolus, et une des conséquences est le résultat proposé ci-contre, et justifié ci-dessous avec une véritable aisance :

E est le pôle de la médiatrice intérieure de [BC] or cette dernière est perpendiculaire commune à (BC) et (IJ) donc E appartient à (IJ)

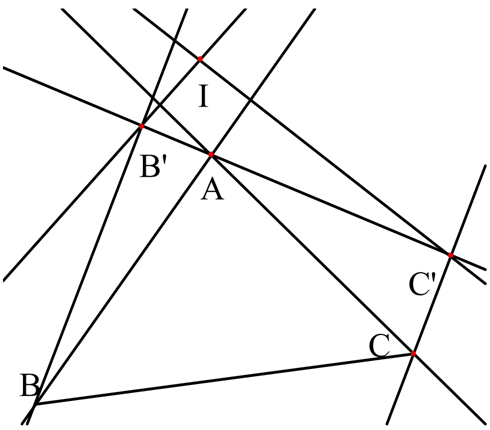
Une fois la notion de triangle elliptique mise en place chacun était invité à ce genre d'exploration, là aussi, de notre point de vue, formatrice quant à la structuration des représentations y compris pour l'euclidien :



Le retour sur l'euclidien s'est effectué autour de plusieurs réalisations : tout d'abord un exercice (du manuel Terracher de 1°S) sur l'orthogonalité traité, avec efficacité, par le produit scalaire qui est en fait un résultat absolu (page suivante), puis un exercice de construction qui montre que certaines démarches euclidiennes quand elles portent sur les symétries orthogonales – sont absolues. Il s'agissait, étant données trois droites en faisceau, de construire un triangle pour lesquelles ces droites sont les médiatrices, puis de construire le cercle circonscrit ou l'équidistante circonscrite selon le type de faisceau. Le commentaire est simple :

On a reproduit le même type de construction qu'en euclidien

Pour l'exercice sur l'orthogonalité, dont voici le texte de 1°S :

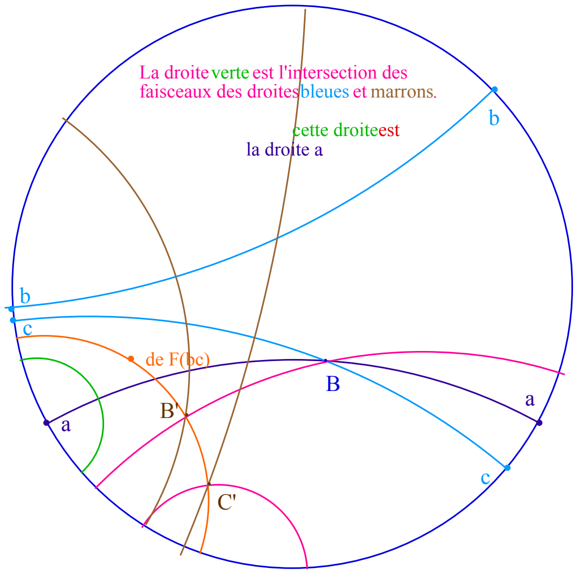


ABC est un triangle, et Δ une droite passant par A. Soient B' et C' les projections orthogonales de B et C sur Δ. Les perpendiculaires à (AB) passant par C' et à (AC) passant par B' se coupent en I.

1 - Montrer que (AI) est la hauteur de ABC issue de A. Pour cela évaluer séparément les deux produits scalaires $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ et montrer qu'ils sont égaux.

2 - Par un choix convenable de Δ, en déduire une $n^{ième}$ preuve de l'existence de l'orthocentre d'un triangle.

La construction absolue, à partir d'un triangle n'a pas posé de problème, y compris la droite (AI) sachant que I peut ne pas exister.



Il nous a même été reproché de ne pas avoir proposé un exercice « plus trilatère », avec trois droites a, b, c et non pas un triangle ABC : un stagiaire a alors fait la construction ci-contre, nettement plus difficile à réaliser, en terme de réflexion (colorisée pour donner les informations nécessaires).

Lors de cette séance, le caractère « absolu » non plus des résultats – comme dans les séances précédentes – mais désormais des pratiques usuelles s'est généralement bien installé dans les esprits comme en témoigne cette construction (isolée certes mais significative d'une attitude partagée)

VI. Premier bilan

Dans une formation aussi éclair, au-delà d'une fascination théorique chez certains, il est difficile de discerner les effets produits en profondeur. En particulier si le discours relatif à la difficulté pour chacun de sortir de ses propres représentations n'a pu qu'être vécu de l'intérieur en géométrie elliptique, il n'est pas certain qu'il ait un effet durable sur le terrain.
Un autre objectif initial - mettre en évidence que les méthodes utilisées dans un cursus éducatif sont *adaptées* à la situation euclidienne - semble se concrétiser. En effet, pour voir cela, nous avons choisi de faire explorer d'autres pertinences adaptées à d'autres situations, comme le théorème hyperbolique des milieux par des faisceaux à axe ou la polarité elliptique pour d'autres résultats spécifiques sur les milieux (ou d'autres non exposées ici). Et, clairement, un regard différent s'est installé sur les outils nécessaires, avec leur utilisation plus spontanée et significativement plus aisée. Ce recul naissant nous semble un bon indicateur de la distanciation que nous voulions faire naître vis-à-vis des techniques enseignées.

Il reste que 4 séances sont beaucoup trop peu. Une maquette plus réaliste proposerait 6 séances pour dissocier le travail sur les droites du travail sur les cycles dans les deux géométries (2 séances hyperboliques et 2 autres elliptiques). Cela permettrait à la dernière séance d'être consacrée entièrement à un retour vers l'euclidien, en particulier en développant – ce qui n'a pas été fait ici – les équivalences euclidiennes (sur **R**) avec l'axiome d'Euclide.

Bibliographie

BACHMANN (1959) – Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff – Springer

BAKER H. F. (1943) – An introduction to plane geometry with many examples – Cambridge University Press

BEHNKE, BACHMANN, FLADT, KUNLE (1974) – Fundamentals of Mathematics – Volume 2 Geometry – MIT Press (original allemand publié de 1967 à 1971). Ouvrage de référence majeur, les chapitres 2 et 5 ont été écrits par Bachmann.

Bien entendu le premier ouvrage de référence pour l'axiomatique du même nom … en allemand.

Contient un chapitre sur l'axiomatique de Bachmann

GREENBERG Marvin Jay (1997) – Euclidean and Non-euclidean Geometry – W. H. Freeman. Ouvrage de référence, facile d'accès, utilisable en formation.

HARTSHORNE Robin (2002) – Geometry : Euclid and beyond – Springer (2° Ed)

HOUDEMENT, C., Kutzniak, A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. Recherches en Didactiques des mathématiques, Vol. 16.3, pp. 289-322

KARZEL Helmut (1993) Developpement of non-Euclidean geometries since Gauss. (p. 397 – 417) (beaucoup d'informations contemporaines – bibliographie riche)

MIRON Radu, BRANZEI Dan (1995) – Backgrounds of Arithmetic and Geometry – An Introduction – World Scientific (chapitre sur l'axiomatique de Bachmann : théorème de Hjelmselv et cocyclicité, bibliographie de 579 livres ou articles)

PERRY Earl (1992) – Geometry – Axiomatic Developpements with Problem Solving – Marcel Dekker Inc. Utilisable en formation pour ses développements (élémentaires) sur l'axiomatique.

Annexe : l'axiomatique de Bachmann

Nous reprenons les notations de Bachmann pour exposer son axiomatique. Ainsi on notera la composition u o v sous la forme vu. Bachmann note | la relation binaire « le produit est d'ordre 2 » : pour deux éléments a et b d'un groupe G, on notera désormais **a | b** pour dire que **ab ≠ 1**, l'unité du groupe et que **$(ab)^2 = 1$**.

Avec ces notations, en notant par des minuscules les symétries orthogonales identifiées à leurs axes et des majuscules les symétries centrales identifiées à leurs centres, nous pouvons exprimer les principales propriétés de base de la géométrie euclidienne sous la forme algébrique suivante :

- Les transformations sont involutives : $a \neq 1$ et $a^2 = 1$, $P \neq 1$ et $P^2 = 1$
- L'orthogonalité : $a \perp b$ ssi $a \mid b = 1$
- L'incidence : A I d ssi A | d