Comment l'informatique, les calculatrices et les logiciels peuvent permettre d'augmenter la part des mathématiques dans les TPE ?

André Guillemot

Comment l'informatique, les calculatrices et les logiciels peuvent permettre d'augmenter la part des mathématiques dans les TPE ?

André Guillemot, lycée Emile Zola, 35000 Rennes

Depuis la mise en place des TPE (Travaux Personnels Encadrés), on constate en général que les mathématiques y ont une place très réduite et je le déplore. Pour atténuer cet état de fait, j'ai misé sur l'informatique et les calculatrices. Je compte ici vous montrer ce que j'ai fait depuis trois ans (c'est un témoignage mais pas forcément un modèle!).
On parlera:

- de mes mini TPE en seconde,
- des TPE de 2001–2002. (où on n'avait que des volontaires),
- des TPE de 2002–2003. (où là on devait gérer toute la classe).

Des TPE de seconde!

La rentrée 2000–2001 a vu l'arrivée d'un nouveau programme en seconde et des TPE en première. N'ayant pas de première, je me sentais un peu frustré de ne pas pouvoir me lancer dans les TPE, qu'à cela ne tienne, pourquoi ne pas en faire une initiation en seconde, d'autant plus que j'avais constaté, en examinant les compte rendu des essais expérimentaux de TPE en première que la plupart du temps , les mathématiques étaient absentes. Je trouvais que le chapitre sur les statistiques s'y prêtait bien, surtout quand on le fait comme moi au début de l'année scolaire. Après avoir parlé de simulation et de fluctuation d'échantillonnage **je proposai une liste de sujets "statistiques".** Les élèves, par groupe de deux ou trois et sur la base du volontariat, devaient choisir un sujet et essayer de le mener à terme avant la fin de l'année. Le travail se conclurait par un mini exposé devant les camarades de la classe.
J'ai eu plusieurs surprises agréables:
Tout de suite, toute la classe, sauf un groupe, s'est déclarée partante pour cette expérience.
Les sujets les plus difficiles ont été choisis les premiers.
Personne n'a choisi les sujets proposés dans le cadre du programme.
Pratiquement tous ont mené le travail à son terme.
Tous ont trouvé cela intéressant.
Voici donc de quelques sujets particulièrement bien traités.

1er sujet: "Il paraît que dans toutes les classes de Zola, il y a au moins deux élèves qui ont leur anniversaire le même jour"

Démarche des élèves:

1°)Ils se procurent la liste de toutes les classes de Zola avec les dates de naissance. Ils vérifient et trouvent que dans toutes les classes il y a au moins deux élèves qui ont leur anniversaire le même jour.
"C'est long et pénible à faire, ce n'est pas simple de trouver dans une liste deux qui ont leur anniversaire le même jour!"

2°) On va modéliser avec la calculatrice en choisissant 35 nombres au hasard entre 1 et 365.
"C'est plus facile de repérer deux nombres pareils et on a la possibilité de trier la liste dans l'ordre croissant"
Ce qui donne sur la calculatrice:

```
                 Done
seq(int(365*rand
+1),X,1,35,1)→L1

{96 279 332 349…
SortA(L1)
                 Done
```

```
L1     L2     L3     1
97     0      0
100    1      0
123    0      0
123    0      0
148    1      0
151    0      0
163    0      1
L1(16) =163
```

3°) On fait participer la classe avec ce protocole. Ce qui permet d'avoir un échantillon plus grand. On trouve que la proposition est vraie dans près de 80% des cas, ce qui ne correspond pas au modèle "Zola", d'où débat sur la taille de l'échantillon et l'équirépartition des naissances.

4°) On pourrait faire un programme qui fait automatiquement ce que l'on vient de faire. Ce qui donne sur la calculatrice:

```
PROGRAM:SUZIE
:seq(int(365rand
+1),X,1,35,1)→L1
:SortA(L1)
:0→S
:For(I,1,34,1)
:If L1(I)=L1(I+1
)
```

```
PROGRAM:SUZIE
:S+1→S
:End
:If S>0
:Then
:Disp "VRAI"
:Else
:Disp "FAUX":End
```

```
                 Done
VRAI
                 Done
FAUX
                 Done
VRAI
                 Done
```

"Il faut compter les VRAI et les FAUX"

5°) On améliore le programme.

```
PROGRAM:SUZIE
:Input N
:0→T
:For(J,1,N,1)
:seq(int(365*ran
d+1),X,1,35,1)→L
1
:SortA(L1)
```

```
PROGRAM:SUZIE
:0→S
:For(I,1,34,1)
:If L1(I)=L1(I+1
)
:S+1→S
:End
:If S>0
```

```
PROGRAM:SUZIE
:T+1→T
:End
:Disp T
:
:
:
:
```

Et maintenant on peut regarder ce qui se passe dans 100 classes ou 1000 classes, il suffit d'être un peu patient!

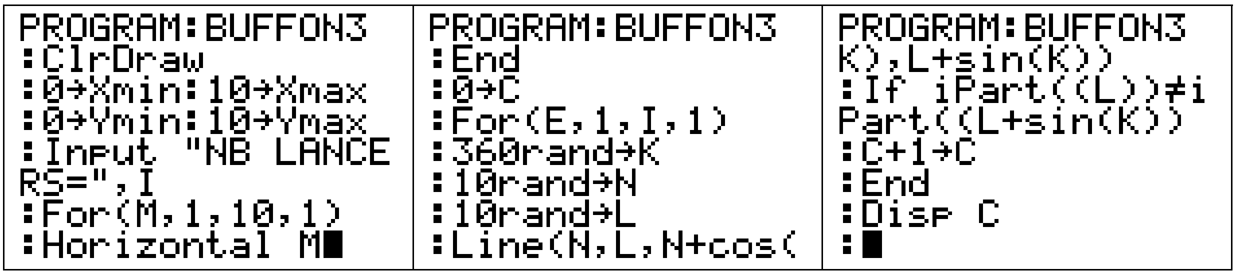
```
prgmSUZIE
?100
             78
           Done
?1000
            810
           Done
```

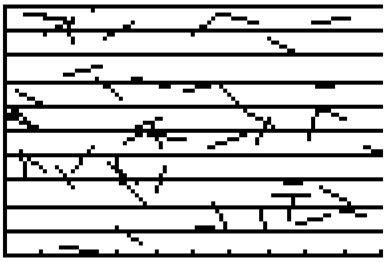
Et si on changeait le nombre d'élèves par classe? et à partir de combien d'élèves on a plus d'une chance sur deux d'avoir deux élèves ayant leur anniversaire le même jour?
Des questions qui laissent encore une belle place à l'expérimentation.

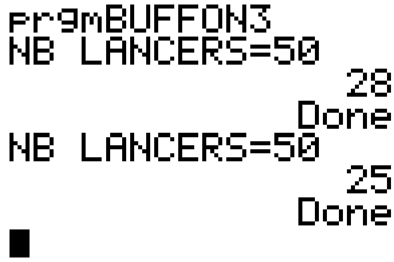
2ème sujet "Aiguille de Buffon"

Ce sujet a été l'occasion de beaucoup d'échanges et rebondissements. Il s'est avéré très riche pour l'équipe qui l'a mené à terme
Pas de phase expérimentale ici mais découverte un peu plus explicite du sujet. Après une recherche sur Internet, on découvre le problème: "On lance une aiguille de longueur x sur un parquet dont les lattes sont de largeur x, quelle est la probabilité que l'aiguille repose sur deux lattes?"

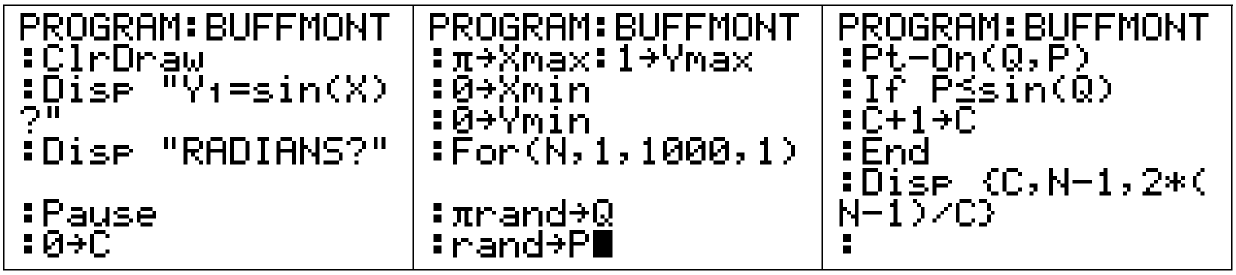
Le programme qui permettait de faire une simulation a été vite mis au point. Un site Internet présentant une animation graphique donne l'idée d'en faire autant sur sa calculatrice, ce qui conduit, après pas mal d'essais et de discussions au programme et à l'animation ci–dessous:

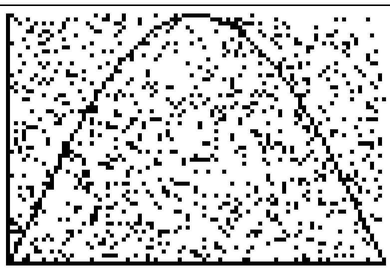


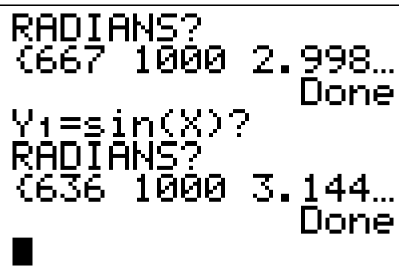




Ayant découvert toujours sur Internet que la probabilité que l'aiguille repose sur deux lattes était de $2/\pi$, l'idée est venue d'utiliser cette expérimentation pour donner une estimation de π. Une question tourmentait quand même l'équipe. Comment démontre–t–on que c'est $2/\pi$?
Nous étions à ce moment–là sur le chapitre de trigonométrie, je suggère de ne plus définir l'aiguille par les coordonnées des extrémités mais par son centre et l'angle qu'elle fait avec la direction des lattes.
La condition " Y < sin(X) " est assez vite trouvée. Il fallait donc être capable de trouver l'aire d'une arche de sinusoïde pour la comparer à l'aire du rectangle qui l'encadre.
Le sujet "Calcul d'une aire par la méthode de Monte–Carlo" n'ayant pas été choisi, je suggère de l'utiliser pour pouvoir résoudre le problème. Ce qui ce traduit par le programme et les résultats suivants.







3ème sujet : Les nombres premiers entre eux

"Chacun des deux joueurs choisit un nombre entier au hasard entre 0 et 1000. Si les deux nombres sont premiers entre eux c'est le deuxième joueur qui gagne, sinon c'est le premier. Le jeu est–il équitable ?"

L'équipe qui l'a réalisé a eu trois approches différentes:

a) Chacun choisit un nombre, c'est la calculatrice qui dit qui a gagné.

```
PROGRAM:PREMIERS
:Prompt A,B
:If gcd(A,B)=1
:Then
:Disp "B GAGNE"
:Else
:Disp "A GAGNE"
:End
```

Méthode très désavantageuse pour le premier joueur.

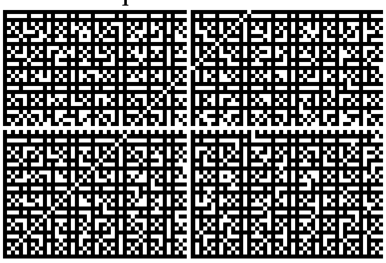
b) C'est la machine qui choisit les deux nombres.

```
PROGRAM:PREMIERS
:int(1000rand)→A
:int(1000rand)→B
:If gcd(A,B)=1
:Then
:Disp "B GAGNE"
:Else
:Disp "A GAGNE"
```

Le jeu devient plus équitable.

c) Une approche graphique

En utilisant les coordonnées des pixels de l'écran, si le couple est formé de deux nombres premiers entre eux, on éclaire le pixel. Ce qui donne:



TPE en terminale 2001–2002

En 2001–2002 les TPE en terminale étaient sur la base du volontariat, dans ma classe 5 groupes étaient partant.
*Un groupe souhaitait travailler sur un sujet de math. mais il n'avait aucune idée.

Après discussion, il décide de s'intéresser à la cryptographie à travers la TI89.
Quatre méthodes de codage seront exploitées dans leur réalisation:
La méthode de César
Enigma.
Le codage DES.
Le système RSA.
Beaucoup de travail et de satisfaction pour ce groupe.

*Un deuxième groupe avait choisi de travailler sur les maladies de l'œil.
Je leur suggère d'exploiter l'imagiciel de M. Aragon réalisé avec Cabri.

Une bonne surprise.

Vers la mi novembre 2001 la lycéenne qui avait travaillé sur l'aiguille de Buffon en 2de vient me voir pour me demander de l'encadrer car elle voulait réaliser un TPE sur un sujet mathématique (et ses encadreurs étaient un prof de bio et un prof de physique). Après quelques séances de discussion le sujet est arrêté "Une démarche scientifique: la recherche d'un algorithme".
Chacun des trois acteurs travaillant sur un sujet différent:.
Mathieu: Illustration d'un théorème issu d'un article paru dans "la recherche".
Pierre: Réalisation de l'ensemble de Mandelbrot sur sa calculatrice.
Eloise: A la recherche de l'algorithme du hasard ou comment fonctionne la fonction Random de ma calculatrice.
Pour mener à bien leur travail ils ont eu besoin des nombres complexes, des groupes, anneaux et corps et bien d'autres outils.
Un beau travail!

TPE 2002–2003

Les TPE sont obligatoires en terminale, ce qui pose un problème car nous devons encadrer 13 groupes à deux.

*Un groupe souhaite traiter un sujet de simulation (vous avez fait des choses intéressantes dans votre seconde il y a deux ans, on aimerait bien faire quelque chose dans le même esprit cette année!) mais il n'a pas d'idées.
C'est ainsi que ce groupe va traiter le sujet **" Le spaghetti coupé en trois ou différentes images du hasard"**
avec le plan suivant:
Mise en évidence de différents protocoles expérimentaux.
Modélisation théorique.
Simulations 1) Grâce à l'informatique, 2) sur l'homme.
Comparaison des résultats et interprétation des différences.

*Un des auteurs du sujet sur **la cryptographie** de l'année précédente redouble, comme les textes l'y autorisent, il représente cette année le même sujet en l'améliorant. (les parties présentées par ses compagnons 2002 sont remplacées par d'autres méthodes de cryptage –méthode de Hill avec les matrices–) Le jury n'étant pas le même la production est appréciée différemment!

**Les autres groupes ne nous consultent pas pour le choix de leurs sujets.
Je vais quand même réussir à glisser un peu de math. dans certains d'entre eux.**

Les dunes désertiques.

Un atelier du congrès de l'APMEP était consacré à la modélisation des dunes de sable avec Cabri, je suggère à mes élèves d'y venir faire un tour. De bonnes idées furent recueillies ce qui donna lieu à une belle expérimentation et une modélisation très appréciées du jury.

La compression des données.

Deux des trois participants à ce TPE ayant mis la barre un peu haut, le troisième se trouva assez vite dépassé, je lui suggérais de se pencher sur les polices true type. A l'aide de Cabri et des barycentres il a réussi à faire quelque chose de personnel et qui rentrait bien dans le cadre fixé.

Deux TPE qui n'ont pas été au bout de ce que j'aurais souhaité.

Trajectoire d'une boule de billard dans un quadrilatère.
Après avoir bien démarré, le groupe s'est vite essoufflé et par manque de motivation, il n'a rien rédigé.

Le système solaire.
J'avais suggéré de développer un peu plus la notion d'ellipse mais le groupe n'a pas accroché!

En conclusion, si on veut que les mathématiques prennent un peu plus de place dans les TPE il faut que l'encadreur s'implique, propose des pistes, suggère des idées car naturellement les élèves ne choisissent pas de sujet à base de math.

ANNEXE 1

1°)Les nombres premiers entre eux.

Chacun des deux joueurs choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 1000. Si les deux nombres sont premiers entre eux, c'est le joueur A qui gagne, sinon c'est B qui gagne. Le jeu est-il équitable?

2°)Les dix cartes.

Un paquet de dix cartes est composé de cinq cartes rouges et cinq noires. On tire au hasard deux cartes.
Si les deux cartes sont de la même couleur, c'est le joueur A qui gagne, si elles sont de couleurs différentes, c'est B qui gagne. Le jeu est-il équitable?

3°)Les anniversaires.

Il parait que dans toutes les classes de Zola, il y a au moins deux élèves qui ont leur anniversaire le même jour. Se servir de simulations pour confirmer ou infirmer cette hypothèse.

4°)Les six enfants

Parmi les familles de 6 enfants, quel est le pourcentage de familles composées de trois garçons et de trois filles?

5°)Les brins de laine.

On prend 4 brins de laine, on les plie en deux et les huit extrémités sont nouées, au hasard, deux par deux.
Le joueur A gagne si on obtient un grand rond, sinon c'est le joueur B qui gagne. Le jeu est-il équitable?

6°)Monté Carlo.

Calculer l'aire d'un disque de rayon 1 par la méthode de Monté Carlo.
Calculer l'aire d'un domaine limité par une parabole ($y = x^2$) quand $-2 \leq x \leq 2$ par la méthode de Monté Carlo.

7°)La différence.

On prend deux nombres x et y au hasard dans l'intervalle [0; 1], si la différence entre le plus grand et le plus petit est inférieure à 1/3, c'est le joueur A qui gagne, sinon c'est le joueur B. Le jeu est–il équitable?

8°) Les bonbons.

Un paquet de bonbons est composé de 3 bonbons rouges et 7 bonbons verts et on les mange en respectant l'algorithme suivant :

a- On prend un bonbon au hasard, on note sa couleur, on le mange et on va en **b**.
b- On prend un autre bonbon, on note sa couleur, s'il est de la même couleur que le précédent on le mange et on va en **b**; s'il n'est pas de la même couleur que le précédent, on le remet dans le paquet et on va en **a.**

Par quelle couleur va-t-on le plus souvent terminer le paquet?

9°) Les gâteaux aux raisins.

Marine prépare un gâteau aux raisins pour les 28 élèves de la classe. Pour cela elle introduit 28 raisins dans la pâte en préparation, mélange bien le tout et répartit la pâte dans 28 ramequins avant de mettre le tout à cuire. Combien y aura-t-il de gâteaux sans raisin?

10°) Les chasseurs.

Vingt pigeons passent au dessus de 20 chasseurs. Chaque chasseur vise un pigeon et ils tirent tous ensemble. Combien peut-on espérer de survivants après les tirs? (tout pigeon visé est tué)

11°) Aiguille de Buffon.

Tracer sur une feuille des lignes parallèles espacées de la distance d. Lancer sur cette feuille quadrillée des tiges de longueur d, quel est le pourcentage de tige qui rencontrent une ligne?

12°) Le lièvre et la tortue.

On lance un dé, si on obtient un 6, le lièvre avance de 6 pas et gagne, si on n'obtient pas un 6 la tortue avance d'un pas et on recommence. La tortue gagnera si elle avance de 6 pas avant le lièvre. Quel est le pourcentage de chances de gagner pour chacun des deux concurrents ?

13°) Le saut de puce

Une puce se déplace sur une droite en faisant un saut, soit en avant, soit en arrière. Au bout de 10 sauts, à quelle distance de son point de départ se trouve-elle?

14°) Le saut de kangourou

Un kangourou se déplace soit en faisant un saut vers le nord soit en faisant un saut vers l'ouest. Au bout de 10 sauts, à quelle distance de son point de départ se trouve-il?

15°) Le carré.

On prend deux points au hasard dans un carré de côté 1. Si la distance de ces deux points est inférieure à 0,5 c'est le joueur A qui gagne, sinon c'est le joueur B. Le jeu est–il équitable?

16°) Le Pile ou Face "équitable".

Pierre dispose de 5 euros, va au casino et joue à "Pile ou Face". S'il obtient "Pile", le casino lui donne 1 euro, s'il obtient "Face", il donne 1 euro au casino.
Au bout de combien de coups est–il ruiné?

17°) Pile ou Face.

On lance 30 fois une pièce de monnaie, si une même face sort 5 fois de rang, le joueur A a gagné sinon c'est le joueur B. Le jeu est–il équitable?

18°) A la foire.

Pour une mise de 1 euro, le joueur peut parier sur un nombre entier compris entre 1 et 6. Il lance alors trois dés. Si le nombre sur lequel il a parié sort 1 fois, 2 fois ou 3 fois, on lui rembourse sa mise plus 1 €, 2€ ou 3€, sinon il perd sa mise. Le jeu vous semble–t–il équitable?

19°) La fourmi.

Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un cube. Elle part d'un point O, à chaque sommet, elle choisit au hasard l'une des trois arêtes qui s'offrent à elle. Quelle distance moyenne parcourt–elle pour atteindre le sommet diagonalement opposé au point de départ?

20°) Le triangle.

On prend trois nombres au hasard entre 0 et 10.
Si les trois nombres sont les mesures des côtés d'un triangle, on a gagné. Le jeu est–il équitable?
Dans le cas où on a un triangle, est–il plus facile d'obtenir un triangle avec trois angles aigus, ou un triangle avec un angle obtus?