Rôle et usage des logiciels et calculatrices dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

K. Tschacher

Rôle et usage des logiciels et calculatrices dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

1. Le système de l'éducation nationale en Allemagne

Il faut d'abord essayer d'expliquer l'éducation nationale dans un pays de structure fédérale. Chaque Bundesland possède un ministère de l'éducation et dans tous les Bundesländer presque tous les règlements sont différents, qu'il s'agisse de la formation des professeurs, des programmes d'enseignement, des manuels ou de l'examen final...

Le schéma de formation des élèves

Quatre ans de scolarité commune à tous les élèves sous forme coéducative. Les enseignants du primaire ont fait des études à l'université et donnent 28 heures de cours par semaine. Pendant leurs études ils approfondissent leurs connaissances en mathématiques et reçoivent une formation en didactique des mathématiques . Ils enseignent toutes les matières du cycle primaire.
Trois voies différentes s'offrent aux élèves au début de la cinquième année : les plus doués entrent au Gymnasium, après une évaluation de l'établissement qu'ils quittent. De même les élèves moyens partent pour la Realschule et les autres vont à la Hauptschule.
Les élèves fréquentent la Hauptschule pendant six ans ; à l'âge de 15 ou 16 ans ces élèves entrent en général dans une entreprise pour y faire un apprentissage de trois ans, accompagné de cours théoriques pour la profession envisagée et de cours dans les matières générales dans une Berufsschule, école d'Etat (système dual) . Les professeurs de la Hauptschule aussi sont formés à l'université et ils étudient à fond une matière, cependant ils enseignent plus tard toutes les matières, y compris celles dans lesquelles ils n'ont pas reçu de formation spécifique.
Les jeunes qui vont à la Realschule y restent aussi pendant six ans ; leur formation est bien plus théorique, ils apprennent tous une langue étrangère, en général l'anglais, et reçoivent une bonne formation en mathématiques et en sciences . Ils entrent eux aussi dans des entreprises et apprennent un métier dans ce système dual – patron et école d'Etat –. Les professeurs de la Realschule font des études plus approfondies en deux disciplines et ils n'enseignent que les disciplines étudiées.
Les études au Gymnasium durent neuf ans et se terminent par l'Abitur, c'est à dire le baccalauréat, qui permet d'entreprendre des études dans toutes les facultés et dans tout le pays. Pendant les deux dernières années les élèves choisissent deux disciplines approfondies et reçoivent aussi une formation dans les autres disciplines. Les professeurs du Gymnasium font des études très approfondies dans deux disciplines, études couronnées par un diplôme universitaire.
Tel est le bon coté des choses, le mauvais_va suivre. La république fédérale d'Allemagne ne dispose pas d'une Education nationale. Le système fédéral accorde une très grande autonomie aux Länder dans le domaine de l'éducation et de la culture (et de la sécurité, de la police etc.). Ce qui signifie :
16 ministères de l'éducation, 16 administrations qui travaillent parallèlement, 16 programmes scolaires différents, 16 examens finaux différents de niveaux différents, 16 règlements différents pour la formation des professeurs, 16 statuts des universités différents, je m'arrête là…
Il y a certes, naturellement, une institution consultative qui cherche à harmoniser les lois et les dispositions divergentes, la Kultusministerkonferenz qui décide finalement en recourant au plus petit dénominateur commun, pas toujours pour le bien des personnes concernées.

2. Les objectifs poursuivis dans l'enseignement des mathématiques

Nous allons présenter cette formation avec sa double orientation : le côté formation formelle, c'est-à-dire des objectifs concernant les qualifications dites clés et le côté formation substantielle, c'est-à-dire des objectifs concernant un programme donné. Voici une liste des objectifs qui juxtapose objectifs généraux et objectifs mathématiques spécifiques.
Il faut envisager deux catégories d'objectifs : d'un coté acquérir les notions et la maîtrise du calcul et d'un autre côté comprendre les méthodes et les procédés mathématiques. Les nouveaux médias devront être envisagés surtout en vue de la réalisation de ces deux objectifs.
La conception actuelle en Allemagne - avec toutes les restrictions nécessaires dues à de nombreuses différences de points de vue- peut être caractérisée par des "idées centrales" qui représentent le fil rouge tout au long du programme de mathématiques [Heymann] :

- L'idée de compter
- L'idée de mesurer
- L'idée de structurer l'espace
- L'idée de la relation fonctionnelle
- L'idée de l'algorithme
- L'idée de modeler à l'aide des mathématiques.

On trouve dans la littérature pédagogique bien des objectifs généraux pour la formation scolaire et pour la formation de l'élève en général. Mais il reste à trouver une application cohérente de ces réflexions pédagogiques dans la pratique du cours de mathématiques. On ne peut pas formuler des objectifs sans avoir fixé la perspective mathématique et en même temps une image de l'être humain [Winter]. La définition de l'être humain comme individu créatif, réfléchissant, modélisant, parlant exige un cours de mathématiques dans lequel les élèves devront avoir la possibilité :

- d'être créatif (rechercher des lois, classer des objets, ordonner des données,...)
- de s'entraîner à argumenter rationnellement (définir des notions, reconnaître des propriétés, analyser des théorèmes,...)
- de reconnaître l'intérêt pratique des mathématiques (classer des données, établir des rapports, trouver des démarches en vue d'une solution,...)
- d'acquérir les facultés formelles (résoudre par calcul formel et par algorithme, utiliser des variables et des symboles,...)

On exige trois expériences de base qui sont reliées entre elles de manière inséparable :
Les élèves se rendent compte par un raisonnement particulier des phénomènes de cet univers (nature, société et civilisation) qui nous concernent ou qui devraient nous concerner.
Les élèves font connaissance avec des objets et des faits mathématiques qui sont représentés dans le langage, dans les symboles, dans les images et dans les formules : Ils apprennent à y reconnaître les créations mentales et l'ordre déductif du monde.
Les élèves trouvent la solution d'un problème qui dépasse les mathématiques proprement dit et acquièrent la faculté de résoudre un problème.
Jusqu'ici il a été question de l'enseignement traditionnel des mathématiques. L'enseignement de l'informatique a-t-il ajouté des objectifs nouveaux?
Je proposerai ici quelques mots-clés sans m'étendre dessus :

- langages de programmation
- études des algorithmes
- différence entre nom et valeur d'une variable
- modèle discret de systèmes dynamiques

Et finalement, est-ce que les systèmes de calcul formel ont apporté de nouveaux objectifs aux mathématiques? L'évolution est en cours et je ne suis pas un mage qui voit l'avenir. Mais j'envisagerais deux perspectives :

- L'informatique mène à représenter - opérer - interpréter
- "L'ordinateur nous oblige à réfléchir à des choses auxquelles nous aurions dû réfléchir depuis longtemps." [Schupp]

3. Les nouvelles voies pour atteindre ces objectifs

3.1 Les principes didactiques

Ces principes qui sont en grand nombre, ce qui est en même temps bien embarrassant, on peut essayer de les regrouper de façon plus claire.

Les directives qui concernent les contenus

- Poser des idées de bases
- Etablir des relations

Les directives qui concernent les élèves

- Apprendre à poser des questions
- Travailler dans le sens opératoire de Piaget
- Apprendre en autonomie
- S'entraîner et revoir

Les directives qui concernent les outils

- Visualiser de façon adéquate
- Stocker des connaissances et déléguer des savoir-faire

3.2. Se référer à des idées de bases (Grundideen)

Pour utiliser une image, les mathématiques ne sont pas une mer avec des îles dispersées ; au contraire, les sujets traités dans un cours de mathématiques ne doivent plus être enseignés sans se référer aux connaissances préalablement acquises. Ces idées de base peuvent être la notion de nombre, d'algorithme, de fonction, de linéarité, d'approximation, de modèle, d'optimisation, de démonstration, de construction ou de définition. On fondera le cours sur ces idées de bases et on établira entre elles les rapports adéquats..

3.3. Etablir des relations

Actuellement on conçoit la mémoire comme étant un réseau de notions et de relations. Ceci rend nécessaire de travailler d'après le principe d'un apprentissage fondé sur des liens et sur l'intégration des connaissances. Ces deux principes exigent de ne pas enseigner les notions de façon isolée comme des éléments de connaissance, mais sous la forme d'un réseau de notions et de relations qui donnent un sens aux choses. On acquiert de nouvelles connaissances quand on est capable de les rattacher au savoir présent. Cela est prouvé, on n'apprend que sur la base d'un fondement de connaissances. Le développement de ces points d'ancrage et de ces relations entre les connaissances anciennes et récentes est fondamental.

Ce développement progressif de relations est appelé apprentissage cumulatif. Ceci suppose de prévoir des structures d'aide à l'apprentissage.

J'ajouterai ici aussi le principe de la richesse des relations (Beziehungshaltigkeit) [Freudenthal] par lequel les élèves établissent des bases communes entre leur vie et les mathématiques.

Avec les nouveaux médias ce sont justement ces principes qui peuvent être envisagés. Les multiples et parallèles possibilités de différentes formes de représentation facilitent évidentes les relations entre le plan symbolique, numérique et graphique.

3.4. Apprendre à poser des questions

Au cours du processus d’apprentissage les réponses n'ont de sens si elles sont le résultat d'une recherche pour arriver à une explication ou à la solution d'un problème, et seulement dans ce cas. Les questions représentent alors une quête de sens et de signification. C'est pourquoi les élèves doivent apprendre à poser des questions. La méthode qui consiste à poser des questions est le principe socratique qui a pour but d'augmenter les connaissances en initiant et en dirigeant le processus de solution d’ un problème. Ce principe socratique est lié de très près au principe de solution et du principe génétique. Tous ces principes ont un dénominateur commun : les mathématiques ne sont pas enseignées comme un produit tout fait, l'élève est devant un processus où le raisonnement mathématique se développe. Les mathématiques sont quelque chose que l'élève peut découvrir ou inventer, même s'il s'agit souvent en réalité de retrouver des idées déjà élaborées.
Les nouveaux médias débarrasseront nos élèves d'activités algorithmiques, ce qui laissera plus de place aux méthodes heuristiques et expérimentales. Ces formes de travail n’ont de sens que si les questions et leurs réponses sont bien comprises.

3.5. Travailler dans le sens opératoire de Piaget

L'intelligence humaine se développe par étapes, par paliers ou par stades de développement. La pensée se forme par un système flexible basé sur des schémas cognitifs. Le point de départ du développement de la réflexion enfantine est l'action directe avec des objets concrets. Par la suite l'enfant élargit cette pensée enfantine par des images, des signes et des symboles. Enfin a lieu un processus d'intériorisation qui rompt avec les expériences concrètes vécues et l'enfant devient capable de penser de façon abstraite et formelle. La pensée est pour Piaget une forme d'action interne et une activité imaginée. Cette forme d'action interne, dite "opération" chez Piaget, est caractérisée par la flexibilité, c'est- à -dire qu’elle est réversible, compositionnelle et associative. L'intériorisation d'une opération se réalise selon [Aebli] en trois étapes : concrète, figurative et symbolique. Le passage d’une étape à une autre se fait par la réflexion de l’intéressé sur ses propres activités et par la verbalisation des actions ou par une forme d'exercice opératoire. Cela implique des variations de la situation de départ, des recherches de démarches différentes, des variations des données, des variations des valeurs demandées, des variations des données sans importance.
Les nouveaux médias permettent de réaliser cela à grande échelle. De multiples représentations d'un objet sont possibles : symbole, graphique, diagramme, construction, table. Le principe opératoire est d'une grande utilité pour l'utilisation de l’ordinateur en vue du développement d'une notion. Pour cette intériorisation une question est fondamentale : " Qu'est-ce qu'il se passe, si...", question qui aboutit à une démarche expérimentale.

3.6. Apprendre par soi-même (en autonomie ou auto activité) Selbsttätigkeit

Bien des formes de travail des élèves telles que résoudre un problème, découvrir un phénomène, réaliser un projet ou, de façon générale, toute forme ouverte de cours, exigent de l'élève une activité personnelle et un intérêt individuel. Partant de l'idée constructiviste qu'acquérir une connaissance suppose cette activité personnelle. Toutes les impressions des sens constituent finalement une construction mentale. Un cours fondé sur cette activité personnelle aura pour objectifs de développer l'autonomie de l’élève, de le motiver par son propre succès et de

lui permettre de tirer profit de ses propres fautes. Le développement de cette autonomie a été bien souvent préconisé. Rousseau ,dès le 18ème siècle, et le mouvement de réforme pédagogique du début du 20ème siècle estiment que la réflexion et l'action personnelle sont le fondement indispensable à l'acte d'apprendre.
Cette activité autonome représente un espace dans lequel on projette individuellement des buts, des actions et des raisonnements. Toutes les expériences concernant l'utilisation des nouveaux médias montrent que cette autonomie est favorisée par l'emploi de l'ordinateur. L'ordinateur est quasiment un catalyseur favorisant différentes formes d'enseignement individualisé, de travail à deux ou d'autres formes de coopération.

3.7. S'entraîner et revoir de façon productive

S'entraîner et réviser sont des éléments importants et nécessaires afin d'affermir les connaissances et d'approfondir ce que l'on a appris. Il faut se rendre capable d'appliquer les nouvelles informations dans des situations comparables ou même nouvelles. Cet entraînement et la révision peuvent se faire dans de différents buts : comprendre, stabiliser, opérer, appliquer et expérimenter. L'entraînement ne doit jamais être une activité isolée, mais être accompagné de compréhension. On devra réviser régulièrement et trouver des exercices variant les contextes. On évitera des batteries d'exercices stéréotypés et ennuyeux, qui favorisent l'adoption d'un schéma de solutions sans compréhension.
Les nouveaux médias : Il existe d'une part de nombreux logiciels d'entraînement interactif pour tous les niveaux. Ils peuvent fournir une analyse des fautes et des propositions de solutions. On en trouvera aussi de plus en plus sur Internet. Et l'on songe à des systèmes tutoriaux intelligents qui assisteraient nos élèves pendant leur travail. Les logiciels sont un catalyseur pour reconnaître quelles sont des facultés qui restent aux hommes, ce que l'ordinateur ne sait pas faire comme interpréter une solution numérique ou représenter un raisonnement menant à une solution. Une question reste ouverte, celle de savoir ce qu'il reste indispensable de savoir faire avec papier et crayon et ce que l'on va déléguer à l'ordinateur. Ceci est actuellement très discuté au niveau des termes algébriques. " De combien de transformations de termes l'homme a-t-il besoin? " Wie viel Termumformung braucht der Mensch?" [Hischer]

3.8. Visualiser de manière adéquate

Selon Jérôme [Bruner] on distingue trois formes de représentations des connaissances et des savoir-faire. La forme enactive (représenter par l'action), la forme iconique (représenter par le dessin) et la forme symbolique (représenter par le symbole). Pourquoi les représentations sont-elles si importantes en mathématiques?
En mathématiques les objets sont abstraits, ils ne sont pas présents dans le monde réel. Chaque cercle dessiné au tableau est une image imparfaite d'un vrai objet "cercle". La réflexion abstraite sur des objets abstraits reste invisible dans notre tête, on ne peut communiquer avec les autres que par des représentations. En mathématiques la représentation est étroitement liée aux objets , on pense par symbole ou par signe. C'est à partir de ces représentations que l'on trouve des idées de solution, qu'on reconnaît des régularités ou des ressemblances, qu'on montre des solutions, qu'on établit des preuves et qu'on calcule par algorithme. En fonction des problèmes et propriétés des notions on utilisera les représentations adéquates. Evidemment on passera d'une représentation à l'autre selon les besoins. L'ordinateur permet des représentations en appuyant sur un bouton, permet de les changer rapidement, de les voir parallèlement sur l'écran, de les varier à volonté. On peut opérer avec des objets visibles pour trai-

ter des objets mathématiques. Cette façon différente de manier les objets mathématiques suppose un certain nombre de nouvelles réflexions :
Développer la notion d'objet mathématique, former une idée de base, relier un objet à la réalité. De ce point de vue les activités pratiquées avec l'ordinateur prennent une nouvelle dimension et une qualité remarquable. Cependant l'ordinateur en tant qu'outil nécessite lui-même un langage et une représentation d'objets de mathématiques réalisée par le clavier, les menus et le maniement de la souris.

3.9. Stocker des connaissances et déléguer des savoir-faire

On peut admettre que l'ordinateur en tant que " technologie cognitive " (selon Dörfler) pourra élargir et renforcer la pensée. Pour lui il n'y a pas de séparation entre la pensée et le contexte, entre l'objet abstrait et sa représentation ; la réflexion a lieu d'un côté en corrélation avec la façon de représenter et de travailler et avec le système des objets mathématiques. Les nouvelles technologies deviennent en ce sens une partie centrale de la pensée et elles rendent possible de transférer des savoir-faire mathématiques de notre tête à une machine. Ce transfert n'est pas le premier qu'on ait connu en mathématiques, il a toujours été caractéristique des activités mathématiques. Nos connaissances forment un composé de briques, de procédures et de modules, dont on se sert dans leur intégrité. Comme la formule pour la solution de l'équation du second degré, que l'on applique sans chaque fois se souvenir du raisonnement. Cette méthode permettra aux élèves d'être considérablement dispensés d'activités algorithmiques au profit de l'élaboration des différents étapes d'un raisonnement et de l'interprétation des résultats. On estime que le rôle traditionnel de l'élève va changer au lieu d'aligner les calculs, il ordonnera et projettera ses calculs.[Weth] Ce changement aura pour conséquence que l'on ne pourra plus à chaque fois reconstituer explicitement un bon nombre de calculs. C'est comme pour les valeurs des fonctions trigonométriques, on ignore comment on trouve les zéros du graphe d'une fonction. Seuls les spécialistes qui élaborent les logiciels connaissent les programmes implémentés.

4. Internet et le cours de mathématiques

4.1. L'importance de l'usage d 'Internet dans les cours de mathématiques

Nous sommes sûrement au début d'un développement dynamique qui n'évitera pas de nombreuses erreurs. Mais il est certain qu'à la longue on ne pourra pas se passer d'Internet pendant le cours de mathématiques. Je vais maintenant énumérer brièvement les perspectives sur la base des publications parues en Allemagne.

4.2. Internet comme dictionnaire

Les moteurs de recherche comme Google présentent aux élèves en quelques secondes un large champ d'informations détaillées qu'il faut évaluer et sélectionner. On pourra trouver là une nouvelle activité pour le cours.

4.3. Source de matériels pour les cours

La préparation du cours pour les professeurs et les élèves deviendra plus facile avec Internet. En effet élèves et professeurs déposent de plus en plus leurs matériels dans des sites réservés à la pédagogie ou des sites "antisèche". On y trouve pour les professeurs des plans de cours, des exercices, des compositions trimestrielles, des devoirs pour préparer un examen, que l'on peut charger sur son ordinateur. Et surtout la préparation de matériel de travail libre en est facilitée (les élèves décident et choisissent individuellement des devoirs à base de jeux ou de cartes ou de copies). Les élèves peuvent se servir de ce matériel pour des exposés ou des devoirs.

4.4. Espace de communication

En Allemagne on trouve de plus en plus de pages sur Internet où des classes présentent les travaux effectués en cours. En mathématiques on publie des exposés, des projets, le matériel de travail et un forum pour discuter avec un public intéressé. Ceci rend nécessaire la communication entre les élèves, souvent de différents établissements. Cette plate-forme oblige les élèves à acquérir une plus grande autonomie. Les informations trouvées sur Internet peuvent constituer un enrichissement par rapport aux livres scolaires et aux connaissances du professeur.

4.5 Internet comme tuteur et moyen d'apprentissage

Internet peut constituer une aide à l'apprentissage dans le sens où l'élève pourra revoir un certain chapitre qu'il a oublié. Il va trouver un cours ou une information où il pourra retrouver ce qu'il lui manque. Et on trouve déjà des systèmes interactifs où les réponses sont corrigées rapidement. Par exemple le concours kangourou en allemand relève de cette forme interactive pour les exercices des années précédentes.

4.6. Seuil de curiosité

Toute sorte d'informations extraordinaires que normalement personne ne peut retrouver sont accessibles par Internet : les 5000 premières chiffres décimales de Pi, les réflexions d'un élève sur le théorème de Pythagore, etc., des dizaines de démonstrations interactives de ce même théorème…..

5. Conclusion

Qu'ai-je voulu vous dire? Que l'Allemagne et la didactique allemande sont à la recherche de solutions pour améliorer et rendre plus efficaces les cours de mathématiques avec l'aide des nouveaux médias. Quelquefois on aperçoit déjà un peu la lumière au bout du tunnel, – c'est une image que l'on utilise chez nous – mais la plupart des questions restent encore sans réponse.

6. Liste des sources :

Aebli, H., Grundformen des Lehrens, Stuttgart, 1968

Brunner,J.S., Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin 1974
Dörfler, W., Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium, in : Dörfler, Peschek, Schneider, Wegenkittl, Computer - Mensch - Mathematik, Wien, 1991
Führer, L., Pädagogik des Mathematikunterrichts, Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen, Braunschweig, 1997
Freudenthal, H., Mathematik als pädagogische Aufgabe, Stuttgart, 1973
Heymann, H.W., Allgemeinbildung und Mathematik, Weilheim, 1996
Hischer, H., Wie viel Termumformung braucht der Mensch?, Hildesheim, 1993
Schupp, H., in : Mathematikunterricht und Computer - neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen, Hildesheim, 1994
Vollrath, H.-J., Algebra in der Sekundarstufe, Heidelberg, 1994
Weth, T., Zum Rollenwechsel des Schülers beim Arbeiten mit Unterrichtssoftware, in : Hischer, Wie viel Termumformung braucht der Mensch? , Hildesheim, 1993
Weigand H.-G., Weth, T., Computer im Mathematikunterricht, Neue Wege zu alten Zielen, Heidelberg, 2002
Winter, H., Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht, Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 1975, Band 7
Wittmann, E., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig, 1981
Zech, F. , Grundkurs Mathematikdidaktik, Weinheim, 1998
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Oktober 2002, Heft 5, Computer algebra systems in mathematics classrooms. Autoren : Schneider, Peschek, Kendal, Stacey, Guin, Trouche, Berry, Drijvers